Предисловие автора

Настоящие лекции представляют собой записки семестрового вводного курса теории представлений, прочитанного мною в Независимом Московском Университете в 2002 и 2003 годах. Они предназначены для студентов начиная со второго курса.

При подготовке этих лекций я придерживался двух правил:
1) представлять общие принципы на простых конкретных примерах;
2) демонстрировать теорию представлений в действии.

Например, в соответствии с первым правилом, я формулирую теорему о существовании инвариантной меры на компактной группе, но вместо доказательства вычисляю ее на группе вращений, которая реально используется ниже. Или демонстрирую унитарный трюк Вейля на примере $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

В соответствии со вторым правилом, в лекции о представлениях симметрической группы я привожу выражение рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили через полиномы Шура. Я показываю, что уже простейшие рассмотрения в теории представлений приводят к фундаментальным выводам о строении атома. Кульминацией курса является решение уравнения Шредингера для электрона в центральном поле и вытекающее из него объяснение строения первых периодов таблицы Менделеева.

При подготовке своих лекций я широко пользовался замечательной книгой Э.Б.Винберга "Линейные представления групп". По сравнению с ней я еще более жестко подошел к отбору доказываемых фактов. В то же время я несколько приблизил изложение к классическим книгам И.М.Гельфанда, Р.А.Минлоса и З.Я.Шапиро "Унитарные представления группы вращений и группы Лоренца" и Б.Л.Ван-дер-Вардена "Метод теории групп в квантовой механике". Имеются заимствования из "Фейнмановских лекций по физике".

О.К.Шейнман. Май 2003

Лекция 1. Общие свойства представлений.

1. **Основные определения.** G — группа, V — конечномерное комплексное линейное пространство, $GL(V)$ — группа обратимых операторов в V. *Представлением G в V* называется гомоморфизм $T\colon G \to GL(V)$. Оператор, отвечающий элементу $g \in G$, называется его *оператором представления* и обозначается $T(g)$ или T_g.

Пусть V_0 — подпространство, инвариантное относительно всех операторов представления T. Тогда ограничения операторов T_g на V_0 образуют представление G в V_0, которое называется *подпредставлением* T. Представление, образованное фактор-операторами в пространстве V/V_0, называется *фактор-представлением.* Представление, не имеющее нетривиальных (то есть отличных от нулевого и от него самого) подпредставлений, называется *неприводимым*; в противном случае — *приводимым.*

Представление называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму (нетривиальных) инвариантных подпространств, и *вполне приводимым*, если каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение (complement).

Представление называется *унитарным* относительно заданной невырожденной эрмитовой формы в V, если эта форма инвариантна относительно всех операторов представления (иными словами, все T_g унитарны). Представление называется *унитаризуемым*, если невырожденная инвариантная эрмитова форма существует.

Теорема 1. *Унитарные представления вполне приводимы.*

Доказательство. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству относительно инвариантной эрмитовой формы само инвариантно. □

Теорема 2. *Представления конечных групп унитаризуемы и, как следствие, вполне приводимы.*

Доказательство. Пусть E — какая-либо невырожденная эрмитова форма в V. Тогда

$$(x, y) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} E(T_g x, T_g y) \tag{1}$$

является *инвариантной* невырожденной эрмитовой формой. □

2. **Эквивалентность, морфизмы (сплетающие операторы).** *Морфизмом* представлений $T_1\colon G \to GL(V_1)$ и $T_2\colon G \to GL(V_2)$ называется такой оператор $C\colon V_1 \to V_2$, что $CT_1(g) = T_2(g)C$ для любого $g \in G$. Если C является изоморфизмом линейных пространств, то, по определению, он является и изоморфизмом представлений. Если таковой существует, представления называются *эквивалентными* (обозначение: $T_1 \cong T_2$). Множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы G обозначим $\widehat{G}$.

Теорема 3. *Каждый морфизм неприводимых представлений — либо изоморфизм, либо нулевой оператор.*

Доказательство. Ядро и образ морфизма инвариантны. Следовательно, каждое из них либо является нулевым подпространством, либо совпадает с соответствующим представлением. □

Лемма Шура (Schur). *Каждый эндоморфизм неприводимого представления над $\mathbb{C}$ скалярен.*

Доказательство. $CT(g) = T(g)C$. Пусть λ — характеристическое значение C. $(C - \lambda I)T(g) = T(g)(C - \lambda I)$, т.е. $C - \lambda I$ — морфизм. Но $\det(C - \lambda I) = 0 \Longrightarrow C - \lambda I = 0$ (теорема 3). $\square$

Лемма Шура — основной критерий неприводимости в теории представлений. Напротив, основной метод разложения представлений — построить диагональный (но не скалярный) сплетающий оператор.

Следствие. *Пусть T_1 и T_2 — эквивалентные неприводимые представления. Тогда любой изоморфизм T_1 и T_2 имеет вид $\lambda\sigma$, где $\sigma\colon T_1 \to T_2$ — фиксированный изоморфизм, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\tau\colon T_1 \to T_2$ — изоморфизм, тогда $\tau\sigma^{-1}$ — автоморфизм T_1, т.е. $\tau\sigma^{-1} = \lambda I$. $\square$

Задача. *Каждое неприводимое представление абелевой группы одномерно.*

3. **Основные операции:** $\oplus$, $\otimes$.

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление G в W и $V = U \oplus W$. Представление T в V, определенное формулой $T(g)(x \oplus y) = T_1(g)x \oplus T_2(g)y$, называется *прямой суммой* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \oplus T_2$. Прямую сумму n экземпляров представления τ обозначим $n\tau$.

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление H в W и $V = U \otimes W$. Представление T группы $G \times H$ в V, определенное формулой $T(g \times h)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(h)y$ ($x \in U$, $y \in W$, $g \in G$, $h \in H$), называется *тензорным произведением* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \otimes T_2$. Термин *тензорное произведение* применяется к еще одной, аналогичной, операции, в которой и U, и W — представления одной и той же группы, скажем G. При этом, по определению, $(T_1 \otimes T_2)(g)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(g)y$.

4. **Спектр представления.**

Лемма 1. *Пусть $T\colon G \to GL(V)$ — представление и $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ — разложение в сумму неприводимых инвариантных подпространств. Тогда T вполне приводимо и, более того, для $\forall$ инвариантного $U \subset V$ найдутся такие $i_1, \ldots, i_p$, что $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$.*

Доказательство. $i_1, \ldots, i_p$ выбираем из условия, что $U, V_{i_1} \ldots, V_{i_p}$ — максимальная независимая подсистема (в крайнем случае набор $i_1, \ldots, i_p$ окажется пустым). Тогда для любого $i = 1, \ldots, m$

$$\underbrace{V_i \cap (U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p})}_{\text{инвариантное подпространство в } V_i} = \begin{cases} V_i \\ \{0\} \end{cases}$$

$\{0\}$ исключен, т.к. тогда V_i линейно независимо с остальными. Следовательно, $V_i \subseteq U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots V_{i_p}$ и $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$. $\square$

Лемма 2. *Если T разложено на неприводимые: $T = \oplus T_i$, то любое его подпредставление (фактор-представление) эквивалентно (см. ниже) сумме некоторой части представлений T_i.*

Доказательство. По лемме 1 $V/U = V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p}$ — для фактора доказано. Для подпредставления: всякое подпредставление изоморфно факторпредставлению по дополнительному пространству, а оно в данном случае есть — по лемме 1. $\square$

Теорема единственности. *Разложение на неприводимые единственно с точностью до эквивалентности: если $T \cong T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$ и $T \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, то $m = n$ и после соответствующей перенумерации $T_i \cong S_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. С точностью до изоморфизма можно считать, что представления T_i и S_j действуют в одном и том же пространстве V, и, соответственно, мы имеем два разложения V в прямую сумму неприводимых подпространств: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ и $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, так что $T_{V_i} \cong T_i$ и $T_{U_j} \cong S_j$.

Проведем доказательство индукцией по m. Применим лемму 1 к подпространству $U = U_1$. Это дает $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}$, где $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ — некоторая часть представлений $V_1, \ldots, V_m$. Тогда $T_U \cong T_{V/V_{i_1}\oplus\ldots\oplus V_{i_k}}$. Из данного по условию разложения $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ имеем $T_{V/V_{i_1}\oplus\ldots\oplus V_{i_k}} \cong V_{j_1} \oplus \ldots \oplus V_{j_l}$, где $\{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Следовательно,

$$S_1 \cong T_U \cong T_{V/V_{i_1}\oplus\ldots\oplus V_{i_k}} \cong T_{j_1} \oplus \ldots \oplus T_{j_l}.$$

Так как S_1 неприводимо, то $l = 1$. Введем новую нумерацию подпространств V_i так чтобы V_{j_1} приобрело номер 1. После этого $V_1 \cong U$ и $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{2, \ldots, m\}$. Мы имеем, следовательно, два разложения: $V = U \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m$ и $V = U \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$, из которых вытекает, что

$$T_2 \oplus \ldots \oplus T_m \cong T_{V/U} \cong S_2 \oplus \ldots \oplus S_n.$$

По предположению индукции $m = n$, $T_2 \cong S_2, \ldots, T_m \cong S_m$. $\square$

Следствие *Если* $T \cong \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau \cong \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} n_\tau \tau$, *причем* $\sum_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau < \infty$ *и* $\sum_{\tau\in\widehat{G}} n_\tau < \infty$, *то* $m_\tau = n_\tau$, $\forall \tau \in \widehat{G}$.

Набор $\{m_\tau | \tau \in \widehat{G}\}$ называется *спектром* представления T. Из теоремы единственности следует, что *два представления эквивалентны тогда, и только тогда, когда они имеют одинаковый спектр.*

5. **Неприводимость тензорного произведения.**

Теорема 4. *Тензорное произведение двух неприводимых представлений групп G и H — неприводимо (как представление $G \times H$).*

Доказательство. $T\colon G \to GL(V)$, $S\colon H \to GL(U)$.

1). Пусть $H = \{e\}$ и $S = I$ — тождественное представление. Тогда любое неприводимое подпространство $W \subset V \otimes U$ (отн. $T \otimes I$) имеет вид $V \otimes u_0$ ($u_0 \in U$).

Действительно: пусть $u_1 \ldots u_m$ — базис в U. Всякий элемент $V \otimes U$ единственным образом представим в виде $x_1 \otimes u_1 + \cdots + x_m \otimes f_m$, в частности, для любого $w \in W$ имеем $w = \sigma_1(w) \otimes u_1 + \cdots \oplus \sigma_m(w) \otimes f_m$. σ_i — морфизмы, это очевидно:

$$(T \otimes I)(g)w = \underbrace{T(g)\sigma_1(w)}_{\sigma_1(T\otimes I(g)w)} \otimes u_1 + \ldots.$$

Из последнего соотношения видим, что $\sigma_i(T \otimes I)(g)w = T(g)\sigma_i(w)$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, σ_i — морфизм $(T \otimes I)|_W$ и T — двух неприводимых представлений. По следствию из леммы Шура существуют такой фиксированный изоморфизм $\sigma\colon (T \otimes I)|_W \to T$, и такие $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$ что $\sigma_i = \lambda_i \sigma$. Таким образом,

$$w = \sigma(w) \otimes \underbrace{(\sum \lambda_i u_i)}_{u_0} = \sigma(w) \otimes u_0.$$

Поскольку $\sigma\colon W \to V$ — изоморфизм, имеем $\sigma(W) = V$. Окончательно, $W = V \otimes u_0$.

2). Пусть теперь S неприводимо и $W \subset V \otimes U$ инвариантно относительно $T \otimes S$.

Возьмем $T \otimes I$, которое получается при ограничении вида $T(g) \otimes S(e)$. Пусть $W' \subseteq W$ — неприводимое подпространство в W относительно $T \otimes I$. По п.1 $W' = V \otimes u_0$, $u_0 \neq 0$. Т.о. $W \supseteq V \otimes u_0$. Будем применять к $V \otimes u_0$ операторы вида $T(e) \otimes S(h)$. Так как S неприводимо, то

$$\underbrace{\mathrm{Span}}_{\text{лин. оболочка}} \{S(h)u_0 \mid h \in H\} = U,$$

таким образом, $W \supset V \otimes U$. $\square$

Решения задач к лекции 1. 1. Если G абелева, то T_g является автоморфизмом представления T для любого g. Если T неприводимо, то $T_g = \lambda_g I$, $\lambda_g \in \mathbb{C}$ (лемма Шура), следовательно $\dim T = 1$.

Лекция 2. Разложение регулярного представления

1. **Действия групп на множествах.** Говорят, что задано *действие* σ группы G на множестве X, если каждому $g \in G$ сопоставлено отображение $\sigma(g) \colon X \to X$, причем $\sigma(g_1 g_2)x = \sigma(g_1)(\sigma(g_2)x)$ (*левое действие*), или $x\sigma(g_1 g_2) = (x\sigma(g_1))\sigma(g_2)$ (*правое действие*). В обоих случаях предполагается, что $\sigma(e) = 1$. Отображения $\sigma(g)$ часто называются *сдвигами* (соответственно, левыми или правыми). Как правило, мы будем обозначать сдвиги без указания на σ и писать gx вместо $\sigma(g)x$ и xg вместо $x\sigma(g)$.

Если на X задана структура топологического пространства (гладкого многообразия, аналитического многообразия, пространства с мерой), то сдвиги предполагаются непрерывными (соответственно, гладкими, аналитическими, измеримыми).

Орбитой элемента $x \in X$ называется множество $\{gx \mid g \in G\}$.

Каждому действию на множестве естественным образом соответствует представление G в пространстве функций на этом множестве:

$$(T_g f)(x) = f(g^{-1}x) \quad \text{для левого действия}$$

и

$$(S_g f)(x) = f(xg) \quad \text{для правого действия.}$$

Примером является *регулярное представление группы* G:

$$Reg(g_1, g_2)f(g) = f(g_2^{-1} g g_1).$$

Тут имеет место смешение терминов, так как на самом деле Reg является представлением $G \times G$, а не G. Все-таки, мы будем придерживаться традиционной терминологии.

Ограничение Reg на подгруппы $G \times \{e\}$ и $\{e\} \times G$ дают, соответственно, представления

$$L(g)f(h) = f(g^{-1}h) \text{ и } R(g)f(h) = f(hg).$$

Первое из них называется *левым регулярным*, а второе — *правым регулярным*. Они действительно являются представлениями группы G, причем L соответствует левому, а R — правому действию группы G на самой себе.

Задача 1.

$$\dim Reg = |G|.$$

2. **Двойственное представление.** $T'(g) = T(g^{-1})'$ (справа $'$ — сопряженный оператор, определенный канонически).

Задача 2. T' — *представление.*

3. **Матричные элементы.** Возьмем представление $T\colon G \to GL(V)$. Если выбрать базис в V, мы получим изоморфизм $GL(V) \to GL(n)$, где $n = \dim V$. Сквозной гомоморфизм $G \to GL(n)$ мы будем называть *матричной формой представления* T, имея ввиду под $T(g)$ уже не сам оператор представления, а его матрицу. Элементы $T_{ij}(g)$ этой матрицы *рассматриваемые как функции на* G, называются *матричными элементами представления* T.

Обратно: пусть мы имеем гомоморфизм $G \to GL(n)$. Выбирая базис в V и используя возникающий при этом изоморфизм $GL(n) \to GL(V)$, получим представление G в V. При выборе другого базиса получим эквивалентное представление. Таким образом, с точки зрения теории представлений нет различия между операторной и матричной формой представления. Как правило, мы будем переходить от одной к другой без особых оговорок.

Также без оговорок мы будем переходить от пространства $End(V)$ эндоморфизмов (операторов) в пространстве V к соответствующему пространству матриц $Matr(n \times n)$, если это приводит к эквивалентным представлениям.

В качестве примера обращения с терминологией сформулируем следующую задачу (существенно используемую в излагаемой ниже теории).

Задача 3. *$T \otimes S$ изоморфно представлению в пространстве матриц:*

$$(T \otimes S)(g_1, g_2)\xi = T(g_1)\xi S(g_2)',\ \xi \in Matr(n \times m).$$

В левой части $(T \otimes S)(g_1, g_2)$ — оператор. В правой части $T(g_1) \in Matr(n \times n)$, $S(g_2) \in Matr(m \times m)$. Задача подразумевает установление соответствия между пространством представления $T \otimes S$ и пространством $Matr(n \times m)$.

Линейная оболочка функций T_{ij} называется *пространством матричных элементов представления* T:

$$M(T) = \{ \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij} T_{ji}(g) \mid \xi_{ij} \in \mathbb{C} \}.$$

Организуя числа ξ_{ij} в матрицу ξ, имеем

$$M(T) = \{ tr\, \xi T(g) \mid \xi = (\xi_{ij}) \in Matr(n \times n) \}.$$

Задача 4 (следствие)**.** *$M(T)$ не зависит от выбора базиса.*

Поскольку $M(T)$ является пространством функций, то оно, очевидно, вложено в Reg. Будет ли это вложение морфизмом представлений?

Лемма 1. *$M(T)$ является подпредставлением в Reg.*

Доказательство. Мы должны доказать, что $M(T)$ инвариантно относительно операторов представления Reg. Если $f \in M(T)$, то $\exists \xi\colon f(g) = tr\, \xi T(g)$.

$$\begin{aligned}(Reg(g_1, g_2)f)(g) = f(g_2^{-1} g g_1) = tr\, \xi T(g_2^{-1}) T(g) T(g_1) = \\ = tr(T(g_1)\xi T(g_2^{-1}) T(g)) = tr(\eta T(g)) \in M(t),\end{aligned}$$

где $\eta = T(g_1)\xi T(g_2^{-1})$. ☐

Задача 5. *$T \otimes T' \cong M(T)$.*

Следствие 1. *$M(T)$ — неприводимое представление $G \times G$.*

Следствие 2. *T вложено в R (R — правое регулярное).*

Доказательство. $T \otimes T' \big|_{G \times \{e\}}$ кратно T и вложено в R вместе с $M(T) \cong T \otimes T'$. ☐

Итак, каждое неприводимое представление группы G вложено в (правое или левое) регулярное, причем с кратностью, равной размерности этого неприводимого представления.

4. **Разложение** Reg.

Лемма 2. *Если T и S — неизоморфные неприводимые представления G, то $T \otimes T'$ и $S \otimes S'$ не изоморфны как представления $G \times G$.*

Доказательство. Если бы они были изоморфны, то изоморфны были бы и $TI = T \otimes T' \big|_{G \times \{e\}}$ и $SI = S \otimes S' \big|_{G \times \{e\}}$. Но $TI \cong mT$, $SI = nS$. Лемма следует из единственности разложения на неприводимые. □

Принимая во внимание результат задачи 5, получаем

Следствие 3. *Если T и S — неизоморфные неприводимые представления G, то $M(T)$ и $M(S)$ не изоморфны как представления $G \times G$.*

Пусть $\widehat{G}$ — полный набор классов эквивалентности неприводимых представлений группы G ($|\widehat{G}| < \infty$, т. к. любое неприводимое вкладывается в R).

Лемма 3. $\bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T) \subseteq Reg.$

Доказательство. Для любого неприводимого T, по лемме 1, $M(T) \subseteq Reg$. $M(T)$ неприводимы (следствие 1) и попарно неизоморфны (задача 5 и лемма 2). Отсюда следует, что пространства $M(T)$, $T \in \widehat{G}$ линейно независимы. Предположим противное. Тогда существуют такие $T_1, \dots, T_k, T_{k+1} \in \widehat{G}$, что $M(T_1), \dots, M(T_k)$ линейно независимы, и $M(T_{k+1}) \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(T_i) \neq \{0\}$. Поскольку пересечение инвариантных подпространств инвариантно, а $M(T_{k+1})$ неприводимо, то рассматриваемое пересечение должно совпадать с $M(T_{k+1})$, то есть $M(T_{k+1}) \subseteq \bigoplus\limits_{i=1}^{k} M(T_i)$. Тогда по лемме 2 лекции 1 $M(T_{k+1})$ эквивалентно одному из представлений $M(T_1), \dots, M(T_k)$, что противоречит следствию 3.

Лемма немедленно следует из доказанной линейной независимости подпространств $M(T)$ в Reg. □

Теорема 1 (о разложении Reg). $Reg = \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T).$

Доказательство. Осталось доказать, что каждый элемент из Reg может быть разложен по пространствам $M(T)$.

Пусть $f_1, \dots, f_N$ — базис в Reg, а $R_{ij}(g)$ — матричные элементы правого регулярного представления R в этом базисе.

Для произвольных $j = 1, \dots, N$ разложим $f_j(g)$ по $R_{ij}(g)$:

$$f_j(g) = f_j(e \cdot g) = (R(g) f_j)(e) = \left(\sum_{i=1}^{N} R_{ij}(g) f_i \right)(e) = \sum_{i=1}^{N} f_i(e) R_{ij}(g),$$

т. е. $f_j = \sum_i f_i(e) R_{ij} \in M(R)$. Но R имеет разложение на неприводимые с некоторыми кратностями: $R = \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} m_T T$. Поэтому $M(R) \subseteq \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$ (т. к. в подходящем базисе матрица R — блочно-диагональная с $T \in \widehat{G}$ по диагонали).

Таким образом, $f_j \in \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$ для всех $j = 1, \dots, N$. Это и означает, что $Reg \subseteq \bigoplus\limits_{T \in \widehat{G}} M(T)$. □

Следствие 4 (Теорема Бернсайда (Burnside)).

$$|G| = \sum_{T \in \widehat{G}} (\dim T)^2.$$

Следствие 5.
$$L \cong R \cong \sum_{T\in\widehat{G}} (\dim T)\cdot T.$$

Задача 6. *Найти все неприводимые представления циклической группы* $\mathbb{Z}_m (\cong \{\sqrt[m]{1}\})$.

Задача 7. *Если группа конечна и все ее неприводимые представления одномерны, то она абелева.*

Задача 8. *Найти все неприводимые представления* S_3 *(и построить их).*

5. **Решения задач к лекции 2.** 3. $T\otimes S = \{\sum \xi_{ij} t_i \otimes s_j\}$, где t_i, s_j — базисные элементы. Этому сопоставляется $\xi = (\xi_{ij})$. Формула для действия проверяется простым вычислением.

4. Если $T(g)\to CT(g)C^{-1}$, то $tr(\xi CT(g)C^{-1}) = tr(C^{-1}\xi CT(g)) = tr(\eta t(g))$ — элемент того же самого пространства.

5. $T\otimes T' \cong M(T)$ (T — неприводимо).

а. Воспользуемся матричной интерпретацией $T\otimes T'$ (задача 3) и построим отображение $\mu\colon T\otimes T' \to M(T)$ по формуле $\xi \xrightarrow{\mu} tr(\xi T(g))$.

б. μ — морфизм представлений, действительно

$$(T\otimes T')(g_1,g_2)\xi = T(g_1)\xi(T'(g_2))'(\text{задача } 3) = T(g_1)\xi(T(g_2^{-1})')' = T(g_1)\xi(T(g_2^{-1}).$$
$$(Reg(g_1,g_2)(tr\,\xi T))(g) = tr\xi T(g_2^{-1}gg_1) = tr(T(g_1)\xi T(g_2^{-1})\cdot T(g)),$$

то есть μ коммутирует с действием группы.

в. μ — изоморфизм.

$T\otimes T'$ неприводимо по теореме 2 лекции 1.

Поскольку μ — нетривиальный морфизм, то $\mu(T\otimes T')\cong T\otimes T'$.

Итак, $T\otimes T' \subseteq M(T)$. Но $\dim T\otimes T' = (\dim T)^2$, а $M(T)$ порождается функциями вида $T_{ij}(g)$, $i,j = 1,\ldots,\dim T$, то есть $\dim M(T) \leqslant (\dim T)^2$. Следовательно $T\otimes T' \cong M(t)$.

6. Пусть $T_k(1) = e^{2\pi ik/m} = \omega^k$ ($\omega = e^{2\pi i/m}$), $\dim T_k = 1$. Очевидно, они не изоморфны, их m штук, и по теореме Бернсайда это все представления.

Замечание: можно непосредственно доказать, что матричные элементы представлений T_k линейно независимы. Это приводит к детерминанту Вандермонда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \vdots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \vdots & \omega^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{m-1} & \omega^{2(m-1)} & \vdots & \omega^{(m-1)^2} \end{pmatrix} \quad \square$$

7). Все $M(T)$ одномерны. Следовательно $f(g^{-1}hg) = f(h)$ для любых g,h. Действительно:
$$Reg(g,g)\,\big|_{M(T)}\xi = \underbrace{T(g)\xi T(g^{-1})}_{\text{все одномерно}} = \xi,$$
то есть $Reg(g,g)\equiv Id$.

Итак, $f(g^{-1}hg) = f(h)$, $\forall f,g,h$.

Но если $f(g_1) = f(g_2)$, $\forall f$, то $g_1 = g_2$: действительно, возьмем $f = \delta_{g_1}$, то есть. $f(g_1) = 1$, $f(g) = 0$ ($g\neq g_1$). Если $\delta_{g_1}(g_1) = \delta_{g_1}(g_2)$, то $g_1 = g_2$. Мы доказали, что $g^{-1}hg = h$, $\forall g,h$, то есть $gh = hg$.

8. $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 1^2 + \cdots + 1^2$ (6 раз). Второй случай отпадает так как группа неабелева. Итак, два одномерных представления и одно двумерное.

1). Тривиальное представление.

2). Перестановка $\to (-1)^{\text{четность}}$

3). Двумерное представление: преобразования плоскости соответствует перестановкам вершин правильного треугольника: $A_1 A_2 A_3 \to A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} A_{\sigma(3)}$. Это повороты на $2\pi/3$ и отражения в высотах.

Лекция 3. Характеры и групповая алгебра

1. **Характеры — основные факты.**

$$\chi_T(g) := trT(g).$$

По определению $\chi_T(g) \in M(T)$

Пример. Характеры одномерных представлений S_3.

1) $\chi(\sigma) \equiv 1$ для тривиального представления.

2) $\chi(\sigma) = (-1)^\sigma$ для представления $\sigma \to (-1)^\sigma$.

Характер двумерного представления:

$$\chi(\sigma) = \begin{cases} 2, & \sigma = I \\ 0, & \sigma \text{ — транспозиция} \\ -1, & \sigma = (123). \end{cases}$$

Это следует из того, что в подходящем базисе матрицы $T(\sigma)$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & -\sin\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} \end{pmatrix}.$$

Характеры обладают следующими свойствами по отношению к операциям над представлениями:

$$\chi_{T'}(g) = \chi_T(g^{-1})$$

(для доказательства достаточно взять след от обеих частей равенства $T'(g) = T(g^{-1})'$). Для унитарных представлений

$$\chi_{T'}(g) = \overline{\chi_T(g)}.$$

Для характеров прямой суммы и тензорного произведения представлений

$$\chi_{T\oplus S} = \chi_T + \chi_s, \quad \chi_{T\otimes S} = \chi_T \cdot \chi_S.$$

Докажем второе из этих соотношений. Базис в тензорном произведении — $\{x_i \otimes y_j\}$, где $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ — базисы в пространствах исходных представлений. Тогда (i,j)-й диагональный элемент оператора $T(g)\otimes S(h)$ в этом базисе равен $T_{ii}(g)S_{jj}(h)$. Независимое суммирование диагональных элементов по i и j дает требуемое произведение характеров.

2. **Центральные функции.** Пусть $C(G)$ — пространство всех функций на G, $Z(G) \subseteq C(G)$ — подпространство функций, постоянных на классах сопряженных элементов. Такие функции называются *центральными*.

Характер любого представления T является центральной функцией: $\chi_T(g) \in Z(G)$. Действительно,

$$\chi_T(hgh^{-1}) = tr(T(h)T(g)T(h^{-1})) = trT(g) = \chi(g).$$

Теорема 1. *$\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ — базис $Z(G)$.*

Доказательство. 1). Центральные функции — это функции, неподвижные относительно регулярного представления в следующем смысле:
$$f \in Z(G) \Longleftrightarrow Reg(g,g)f = f, \ \forall g \in G.$$
Для каждого $f \in C(G)$ имеем разложение $f = \sum_{\tau\in\widehat{G}} f_\tau$, $f_\tau \in M(\tau)$, причем это разложение однозначно. Для $f \in Z(G)$ имеем отсюда
$$f = \sum_{\tau\in\widehat{G}} Reg(g,g) f_\tau.$$
Ввиду инвариантности $M(\tau)$ функции $Reg(g,g)f_\tau$ также являются элементами $M(\tau)$. Сравнивая два разложения для f, ввиду однозначности, находим $Reg(g,g)f_\tau = f_\tau$. Таким образом, $f_\tau \in Z(G)$. Мы показали, что
$$f \in Z(G) \Longrightarrow f_\tau \in Z(G) \cap M(\tau), \quad \forall \tau.$$
2). Покажем, что
$$f \in Z(G) \cap M(\tau) \implies \exists \lambda \in \mathbb{C}\colon f = \lambda\chi_\tau.$$
Воспользуемся изоморфизмом $\tau \otimes \tau' \overset{\mu}{\cong} M(\tau)$ и матричной интерпретацией $\tau \otimes \tau'$. Этот изоморфизм имеет вид $\mu : \xi \to f = tr(\xi\tau(g))$. Т. к. f неподвижна относительно действия G, то и ξ неподвижно, т. е. $\tau(g)\xi\tau(g^{-1}) = \xi$. Тогда $\tau(g)\xi = \xi\tau(g)$, т. е. ξ — эндоморфизм представления τ. По лемме Шура $\xi = \lambda I$. Тогда $f(g) = tr(\lambda I)\tau(g) = \lambda\chi_\tau(g)$.

Таким образом мы доказали полноту характеров неприводимых представлений в пространстве $Z(G)$. Их линейная независимость вытекает из независимости пространств $M(\tau)$. □

Следствие 1. *Число классов неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы.*

Доказательство. $\sharp\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\} = \dim Z(G) =$число классов сопряженности. □

Как показывает следующая теорема, характер является важнейшим инвариантом представления.

Теорема 2. *Любое представление определяется своим характером с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Пусть $T = \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau$. Тогда $\chi_T = \bigoplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \chi_\tau$. Так как χ_τ линейно независимы, то числа m_τ определяются однозначно, то есть по характеру определяется спектр представления. □

3. **Групповая алгебра.** Элементы пространства $C(G)$ — это функции, и как таковые их можно перемножать. Однако, в этом пространстве существует еще одно, некоммутативное, умножение, называемое сверткой (обозначается символом $*$). По определению,
$$(\phi * \psi)(g) = \sum_{hk=g} \phi(h)\psi(k).$$
С такой операцией умножения $C(G)$ называют групповой алгеброй группы G.

Элементы групповой алгебры очень удобно записывать в виде формальных линейных комбинаций элементов группы: $\phi \rightsquigarrow \sum_{g\in G} \phi(g)\cdot g$. Например, g будет символизировать функцию, равную 1 на элементе группы g и нулю на прочих элементах. Свертка получится если умножение групповых элементов естественным образом продолжить на такие формальные комбинации, то есть положить $g * h = gh$ и дальше продолжить по линейности.

Непосредственно из определений вытекают формулы

$$R_{g^{-1}}f = f * g, \quad L_g f = g * f.$$

Ввиду R- и L-инвариантности, подпространства $\{M(\tau)|\tau \in \widehat{G}\}$ оказываются идеалами групповой алгебры.

Лемма 1. *$Z(G)$ — центр $C(g)$, т. е. центр $C(g)$ совпадает с алгеброй функций, постоянных на классах сопряженных элементов (центральных функций).*

Доказательство. $f \in Z(G) \iff f * h = h * f$, $\forall h \in G$. $f * h = \sum f(g) \cdot gh$, $h * f = \sum f(g) \cdot hg$. Т. е. при $gh = hg'$ $(g' = h^{-1}gh)$ $f(g') = f(g)$. □

4. **Центральные характеры.** Каждое представление группы продолжается на групповую алгебру:

$$T(g) \to T(f) = \sum_{g \in G} f(g)T(g), \quad f \in C(G).$$

Центральным характером представления T называется $\lambda_T \in Z'(G)$, где

$$\lambda_T(\chi) = trT(\chi) = \sum_{g \in G} \chi(g)\chi_T(g), \; \chi \in Z(G).$$

Если T неприводимо, то $T(\chi)$ — скаляр, т. е. $T(\chi) = \dfrac{\lambda_T(\chi)}{\dim T} I$.

Теорема 3. $\{\lambda_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ *— базис в* $Z'(G)$.

Доказательство. 1. Пусть, как и выше, σ' — представление, двойственное к σ. Когда σ пробегает $\widehat{G}$, σ' также пробегает $\widehat{G}$. Покажем, что

$$\sigma, \tau \in \widehat{G}, \; \sigma' \ncong \tau \Longrightarrow \lambda_\tau(\chi_\sigma) = 0.$$

Вычислим $\tau(\chi_\sigma)$ через правое регулярное представление.

$$R\,\big|_{M(\tau)} = (\dim\tau)\tau \Longrightarrow R(\chi_\sigma)\,\big|_{M(\tau)} = (\dim\tau)\tau(\chi_\sigma).$$

Далее, $R(\chi_\sigma) = *\chi_{\sigma'}$ (свертка с $\chi_{\sigma'}$). Действительно, по определению $R(\chi_\sigma) = \sum \chi_\sigma(g^{-1})R_{g^{-1}}$. Но $R_{g^{-1}} = *g$, а $\chi_\sigma(g^{-1}) = \chi_{\sigma'}(g)$, поэтому $R(\chi_\sigma) = *\sum \chi_{\sigma'}(g)g$.

Если $f \in M(\tau)$, то $f * \chi_{\sigma'} = 0$, иными словами $(*\chi_{\sigma'})\,\big|_{M(\tau)} = 0$. Действительно, $M(\tau)$ и $M(\sigma')$ — двусторонние идеалы, следовательно $f * \chi_{\sigma'} \in M(\tau) \cap M(\sigma')$. Так как $\sigma' \ncong \tau$, то $M(\tau) \cap M(\sigma') = 0$.

Таким образом, $R(\chi_\sigma)\,\big|_{M(\tau)} = 0$, то есть $(\dim\tau)\tau(\chi_\sigma) = 0$, откуда $\lambda_\tau(\chi_\sigma) = 0$.

2. Теперь покажем, что $\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) \neq 0$, то есть $\{\lambda_\tau\}$ — базисный элемент в $Z(G)'$, двойственный к базисному элементу $\{\chi_{\tau'}\}$ в $Z(G)$. По определению

$$\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \chi_{\tau'}(g)\tau(g),$$

следовательно,

$$\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) = tr\,\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \chi_{\tau'}(g)\chi_\tau(g).$$

Воспользуемся унитаризуемостью представления τ и перейдем к эквивалентному представлению унитарными матрицами. Тогда находим $\tau'(g) = \tau(g^{-1})' = \overline{\tau(g)}$, то есть $\tau' = \overline{\tau}$. Следовательно, $\chi_{\tau'} = \overline{\chi_\tau}$. Окончательно имеем

$$\lambda_\tau(\chi_{\tau'}) = \sum_g \overline{\chi_\tau(g)}\chi_\tau(g) \neq 0. \quad \square$$

□

Теорема 4. *Представление конечной группы с точностью до эквивалентности определяется своим центральным характером.*

Доказательство. $T \cong \oplus_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau \tau \Longrightarrow T(\chi) = \sum m_\tau \tau(\chi) \Longrightarrow \lambda_T = \sum m_\tau \lambda_\tau$. Но λ_τ линейно независимы, таким образом числа m_τ определяются по λ_T однозначно. □

5. **Разложение представлений.** Пусть дано представление T группы G. Соответствующее представление $Z(G)$ дает большой запас коммутирующих между собой эндоморфизмов исходного представления, которые весьма полезны для его разложения на неприводимые. Например, в случае представлений с простым спектром неприводимые компоненты совпадают с общими собственными подпространствами этих эндоморфизмов.

Лекция 4. Соотношения ортогональности

1. **Инвариантное скалярное произведение в $C(G)$.**

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}.$$

Лемма 1. *Reg — унитарное представление в $C(G)$.*

2. **Единственность инвариантного скалярного произведения.**

Лемма 2. *Для неприводимого представления инвариантное скалярное произведение единственно с точностью до пропорциональности.*

Доказательство. Пусть $(\cdot\,,\cdot)$ временно обозначает заданное скалярное произведение в пространстве представления. Всякое другое скалярное произведение имеет вид (Ax, y), где A — матрица. Из инвариантности обоих имеем

$$(T_g^{-1}AT_g x, y) = (AT_g x, T_g y) = (Ax, y).$$

Из невырожденности формы $(\cdot\,,\cdot)$ вытекает, что $T_g^{-1}AT_g = A$ для всех $g \in G$, откуда $AT_g = T_g A$ также для всех $g \in G$. По лемме Шура $A = \lambda I$. □

3. **Соотношения ортогональности.** В ходе доказательства теоремы 3 предыдущей лекции мы показали, что $\lambda_\tau(\chi_{\sigma'}) = 0 \Longleftrightarrow \tau \ncong \sigma$. С другой стороны, для унитарных представлений $\lambda_\tau(\chi_{\sigma'}) = \sum_g \chi_\tau(g)\overline{\chi_\sigma(g)}$, откуда немедленно получаем $(\chi_\tau, \chi_\sigma) = 0 \Longleftrightarrow \tau \ncong \sigma$, то есть характеры неприводимых представлений образуют ортогональную систему. Здесь мы докажем более точную теорему, из которой, в частности, следует, что система характеров ортонормирована.

Теорема 1. *Матричные элементы неприводимых представлений (взятые относительно ортонормированных базисов инвариантных эрмитовых форм в своих представлениях) образуют ортогональный базис в $C(G)$ с нормировкой $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = 1/\dim\tau$ $(i, j = 1, \ldots, \dim\tau)$.*

Доказательство. 1). Ортогональность пространств $M(\tau)$.

Пусть $\sigma, \tau \in \widehat{G}$, $\sigma \ncong \tau$. Рассмотрим ортогональный проектор p_σ на пространство $M(\sigma)$. По определению для любого $\varphi \in C(G)$ имеем $p_\sigma\varphi = \varphi_\sigma$, где $\varphi = \varphi_\sigma + \varphi_\sigma^\perp$ $(\varphi_\sigma \in M(\sigma), \varphi_\sigma^\perp \in M(\sigma)^\perp)$. Тогда $Reg\,\varphi = Reg\,\varphi_\sigma + Reg\,\varphi_\sigma^\perp$, причем ввиду инвариантности $M(\sigma)$ и $M(\sigma)^\perp$ относительно регулярного представления $Reg\,\varphi_\sigma \in M(\sigma)$ и $Reg\,\varphi_\sigma^\perp \in M(\sigma)^\perp$. Из этого вытекает, что $p_\sigma Reg\,\varphi = Reg\,p_\sigma\varphi$, то есть p_σ — эпиморфизм регулярного представления на представление $M(\sigma)$. Ограничивая его на $M(\tau)$, получаем морфизм $p_\sigma : M(\tau) \to M(\sigma)$. Так как $M(\tau) \ncong M(\sigma)$, то $p_\sigma\big|_{M(\tau)} = 0$, то есть по определению ортогонального проектора $M(\tau) \subseteq M(\sigma)^\perp$.

2). Ортогональность внутри $M(\tau)$ и нормировка.

Воспользуемся изоморфизмом $\mu\colon Matr(V_\tau) \leftrightarrow M(\tau)$, $\mu(\xi) = tr\,\xi\tau(g)$ (ср. задачи 3,5 лекции 2). При этом предполагается, что в V_τ выбран базис, причем именно такой как указано в условии теоремы: ортонормированный относительно инвариантной эрмитовой формы представления τ. В таком базисе матрицы операторов $\tau(g)$ унитарны.

В $Matr(V_\tau)$ определим скалярное произведение $tr(\xi\eta^*)$ (где $\eta^* = \overline{\eta}'$). Оно инвариантно относительно действия τ в $Matr$, при котором $\xi \to \tau(g_1)\xi\tau(g_2^{-1})$ (то есть перенесенного из регулярного представления).

Мы можем и будем рассматривать $tr(\xi\eta^*)$ и $(\mu(\xi), \mu(\eta))$ как два инвариантных скалярных произведения на одном и том же неприводимом представлении. Они, следовательно, пропорциональны с константой c_τ, то есть $(\mu(\xi), \mu(\eta)) = c_\tau tr(\xi\eta^*)$.

Заметим, что $\tau_{ij}(g) = \mu(E_{ji})$ — по определению. Действительно,

$$\mu(E_{ji}) = tr(E_{ji}\tau) = tr \begin{pmatrix} & & \\ \tau_{i1} & \dots & \tau_{in_\tau} \\ & & \end{pmatrix} = \tau_{ij}$$

(в матрице заполнена только j-я строка). Таким образом, $(\tau_{ij}, \tau_{kl}) = c_\tau tr(E_{ji}E'_{lk}) = c_\tau tr(E_{ji}E_{kl}) = c_\tau tr(\delta_{ik}E_{jl}) = c_\tau\delta_{ik}\delta_{jl}$. В частности, $(\tau_{ij}, \tau_{kl}) = 0$ при $i \neq k$ или $j \neq l$, и $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = c_\tau$, для всех $i, j = 1, \dots, \dim\tau$.

Вычислим c_τ. Ввиду унитарности матриц $\tau(g)$

$$\sum_{j=1}^{\dim\tau} \tau_{ij}(g)\overline{\tau_{ij}(g)} = 1.$$

Просуммируем это по g и разделим на $|G|$:

$$\sum_{j=1}^{\dim\tau} \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \tau_{ij}(g)\overline{\tau_{ij}(g)} = 1 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{\dim\tau} (\tau_{ij}, \tau_{ij}) = 1.$$

Но $(\tau_{ij}, \tau_{ij}) = c_\tau$, при любых i, j (см. выше), следовательно $c_\tau \dim\tau = 1$. □

Следствие 1. $\{\chi_\tau \mid \tau \in \widehat{G}\}$ *— ортонормированный базис в $Z(C)$.*

Доказательство. 1). $\sigma \ncong \tau \Longrightarrow (\chi_\tau, \chi_\sigma) = 0$.

2). $(\chi_\tau, \chi_\tau) = \sum_{i=1}^{\dim\tau}(\tau_{ii}, \tau_{ii}) = (\dim\tau)c_\tau = 1$. □

Следствие 2. $T = \bigoplus\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau\tau \Longrightarrow m_\tau = (\chi_T, \chi_\tau)$

Доказательство. $\chi_T = \sum\limits_{\sigma\in\widehat{G}} m_\sigma\chi_\sigma$, дальше в силу ортонормированности. □

Следствие 3. $T \in \widehat{G} \Longleftrightarrow (\chi_T, \chi_T) = 1$

Доказательство. $T = \bigoplus\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau\tau \Longrightarrow (\chi_T, \chi_T) = \sum\limits_{\tau\in\widehat{G}} m_\tau^2$.

Следовательно, $(\chi_T, \chi_T) = 1 \Longleftrightarrow$ все $m_\tau = 0$ кроме одного, равного 1. □

Следствие 2 — инструмент вычисления кратностей спектра, следствие 3 — критерий неприводимости.

Задачи к лекциям 3, 4. 1. Диаграммы Юнга взаимно однозначно соответствуют классам сопряженных элементов в S_n.
Указания. Берем числа от 1 до n и бросаем произвольным образом в таблицу Юнга. Строки интерпретируем как коммутирующие между собой циклы. Подстановка получается их перемножением. Подстановки, возникающие таким образом из одной диаграммы Юнга, образуют класс сопряженности. Доказательство основано на формуле $\sigma(i_1, \ldots, i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$, где $(i_1, \ldots, i_k)$, $(\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_k))$ — циклы.

2. Выписать диаграммы Юнга S_3, S_4, S_5. Найти число их неприводимых представлений.

$$S_4\colon 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$$

Построить неприводимые представления S_4(указание: использовать изоморфизм S_4 с группой тетраэдра).

3. Найти все неприводимые представления A_4 — группы четных подстановок.

Решение. $|A_4| = \dfrac{1}{2}|S_4| = 12$. Группа A_4 изоморфна группе собственных движений тетраэдра. Действительно, рассмотрим в тетраэдре три отрезка, соединяющие середины противоположных сторон, выберем на них направления. Любое собственное движение определяется либо подстановкой этих трех векторов (S_3, $|S_3| = 6$), либо подстановкой с изменением направления двух из них. Итого — двенадцать элементов.

A_4 имеет трехмерное представление, возникающее из движений тетраэдра. Таким образом $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$, то есть имеется еще три одномерных представления. Любое одномерное представление тривиально на коммутанте, то есть пропускается через фактор по нему: $A_4/[A_4, A_4] \cong \mathbb{Z}_3$. Эта $\mathbb{Z}_3$ образована циклическими перестановками отмеченных трех векторов, по-другому — циклическими вращениями тетраэдра при одной неподвижной вершине.

4. Найти представления группы диэдра $D_n = \{a, b \mid a^n = b^2 = 1, aba = b\}$ ($a = e^{2\pi i/n}$, b — осевая симметрия).

Решение. Ограничение на $\mathbb{Z}_n$ (порожденную элементом a), дает собственные подпространства с $\lambda = e^{2\pi i/n}$. Если $T_a v = \lambda v$, то $T_a(T_b v) = \lambda^{-1}(T_b v)$, то есть при $\lambda \neq \lambda^{-1}$ пары $\langle v, T_b v\rangle$ образуют двумерные неприводимые пространства, а при $\lambda = \lambda^{-1}$ — одномерные. При четном n $\lambda = \lambda^{-1}$ при $\lambda = \pm 1$. При нечетном n — только при $\lambda = 1$, в этом случае из $(T_b)^2 = 1$ имеем $T_b \pm 1$, что дает два одномерных представления. При четном n $\lambda = \pm 1$ и $T_b = \pm 1$, что дает четыре одномерных представления. Также, при любом n имеется $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ двумерных неприводимых представления.

Геометрическое решение: $|D_n| = 2n$. Одномерные и двумерные представления легко строятся явно. Одномерные — при помощи факторизации по коммутанту (в факторе возникает группа $\mathbb{Z}_2$, порожденная элементом b, при нечетном n, и группа $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, порожденная элементами b и $a^{n/2}$ при четном). Двумерные представления соответствуют движениям диэдра (можно посчитать их число и число классов сопряженных элементов). $\square$

5. Разложить в сумму неприводимых:

а. действие группы вращений куба в пространстве функций на множестве его вершин;

б. действие полной группы симметрий правильного тетраэдра в пространстве функций на множестве его ребер.

Указания. Группа тетраэдра изоморфна группе S_4. В самом деле, любая симметрия тетраэдра порождает подстановку вершин. Любая транспозиция вершин порождена отражением в плоскости, проходящей через ребро и середину противоположной стороны.

Связь между кубом и тетраэдром такая: в куб вписано два тетраэдра, симметричных относительно плоскости, перпендикулярной к диагонали, куба и проходящей через ее середину.

Таким образом $\sharp\{\text{граней куба}\} = 2 \cdot \sharp\{\text{граней тетраэдра}\} = 2 \cdot 24 = 48$.

Группа собственных симметрий куба изоморфна группе тетраэдра.

Другой подход к связи S_4 с собственным вращением куба — S_4 переставляет четыре больших диагонали. Это то же, что действие на вершины тетраэдра: любой вершине соответствует большая диагональ.

Для решения задачи предлагается найти характеры соответствующих представлений S_4 и путем решения систем линейных уравнений разложить их по характерам неприводимых представлений. Таблица последних такова (проверить!):

S_4	1 1	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
Трив. U	1	1	1	1	1
Знакоперем. U'	1	-1	1	-1	1
Станд. $V(\dim = 3)$	3	1	0	-1	-1
$V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
двумерное W	2	0	-1	0	2

Лекция 5. Представления симметрической группы $\mathfrak{S}_d$

Эта лекция преследует двоякую цель. Первое — продемонстрировать эффективные методы решения основных задач теории представлений симметрической группы, и второе — дать представление о том как эта "седая" классика работает в современной физике. В этой лекции ничего не доказывается, даются лишь ссылки на соответствующую литературу (W.Fulton and J.Harris. Representation theory (a first course), Springer-Verlag New-York Inc. 1991; V.Kac and A.Raina. Bombay Lectures on Highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd. 1987).

1. **Классификация неприводимых представлений.** Число неприводимых представлений = число диаграмм Юнга = число разбиений $p(d)$, которое может быть задано производящей функцией

$$\sum_{d=0}^{\infty} p(d) t^d = \prod_{1}^{\infty} \frac{1}{1-t^n}$$

2. **Идентификация неприводимых представлений в регулярном.** Дано разбиение $\lambda\colon \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_k \geqslant 1$, $\sum \lambda_i = d$ и соответствующая диаграмма Юнга. Занумеруем клетки диаграммы в произвольном порядке. Введем в $\mathfrak{S}_d$ две подгруппы P и Q:

$$P_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \colon g \text{ сохраняет все строки } \lambda\}$$
$$Q_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d \colon g \text{ сохраняет все столбцы } \lambda\}$$

Имеется ввиду, что элементы первой подгруппы переставляют клетки внутри строк, а второй — внутри столбцов. Поставим этим группам в соответствие следующие элементы группой алгебры $C(\mathfrak{S}_d)$:

$$a_\lambda = \sum_{g \in P_\lambda} g, \quad b_\lambda = \sum_{g \in Q_\lambda} (-1)^g g.$$

Произведение этих элементов называется *симметризатором Юнга*:

$$c_\lambda = a_\lambda b_\lambda \in C(\mathfrak{S}_d).$$

Теорема 1. *Справедливо соотношение $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$. Образ c_λ (при правом действии в $C(\mathfrak{S}_d)$) есть неприводимое представление V_λ и любое неприводимое представление $\mathfrak{S}_d$ получается таким образом.*

Таким образом, $(c_\lambda/n_\lambda)^2 = c_\lambda/n_\lambda$ — такие элементы называются *идемпотентами* кольца $C(\mathfrak{S}_d)$, элемент c_λ/n_λ задает проектор $C(\mathfrak{S}_d) \to V_\lambda$.

3. **Характеры: формула Фробениуса.** Диаграмму Юнга можно задать набором $\mathbf{i} = (i_1 \dots i_d)$, где i_α — число строк диаграммы, имеющих длину α $(\alpha = 1, \dots, d)$. Очевидно,

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \alpha i_\alpha = d.$$

Пусть $k = i_1 + \ldots + i_d$ (число строк диаграммы). Введем переменные $x_1, \dots, x_k$ и каждой строке диаграммы сопоставим переменную из этого набора. Введем полиномы Ньютона

$$P_j(x) = x_1^j + \dots + x_k^j \quad (j = 1, \dots, d)$$

и кососимметрический полином минимальной степени от k переменных (определитель Вандермонда)

$$\Delta(x) = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_i - x_j).$$

Если $f(x)$ — полином, то через $[f]_{l_1 \dots l_k}$ будем обозначать его коэффициенты: $f(x) = [f]_{l_1 \dots l_k} x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}$.

В этих терминах мы можем сформулировать следующую эффективную формулу для характеров, принадлежащую Фробениусу (см. Fulton и Harris).

Возьмем две (вообще говоря, различных) диаграммы Юнга. Зададим первую, как в пункте 2, разбиением λ, а вторую — набором $\mathbf{i} = (i_1 \dots i_d)$. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления, отвечающего первой диаграмме, $C_\mathbf{i}$ — класс сопряженности, заданный набором $\mathbf{i}$. Тогда

$$\chi_\lambda(C_\mathbf{i}) = [\Delta \prod_{j=1}^{d} P_j^{i_j}]_{l_1 \dots l_k},$$

где $l_n = \lambda_i + n - i$ $(n = 1, \dots, k)$, Δ и P_j — полиномы, определенные выше.

4. **Размерности: формула крюков.**

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{\prod(\text{длин крюков})}$$

(произведение берется по всем крюкам, вложенным в диаграмму Юнга λ; крюк — диаграмма, в которой не более одной строки, и не более одного столбца длины выше единицы).

5. **Полиномы Шура.** Полиномы Шура S_λ можно определить из соотношения (Fulton и Harris, Appendix A)

$$S_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}(x) = \frac{\det(x_j^{\lambda_i + k - i})}{\Delta(x)}.$$

Из формулы характеров можно вывести, что

$$\prod_{j=1}^{d} P_j(x)^{i_j} = \sum \chi_\lambda(C_\mathbf{i}) S_\lambda(x).$$

Полиномы Шура играют фундаментальную роль в теории симметрических функций, теории представлений симметрической группы и комбинаторике. Оказывается, они играют фундаментальную роль и в математической физике. Ниже мы коротко описываем два приложения такого рода.

6. **Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КР).**

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)}_{\text{оператор } KdV}.$$

Это уравнение описывает нелинейные волны в плазме. Полиномы Шура позволяют получить класс явных решений этого уравнения.

Теорема 2. *Следующие функции являются рациональными решениями КР:*

$$2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log S_\lambda(x, y, t, c_4, c_5, \dots),$$

где $c_4, c_5, \dots$ *— произвольные константы.*

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили относится к классу *вполне интегрируемых систем*, теория которых является одним из крупнейших достижений второй половины 20 века. В 50-х — 60-х годах 20 столетия, в численных экспериментах, Ферми, Паста и Уламом была обнаружена аномально медленная стохастизация *цепочки Тода*, а Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой — солитонные решения *уравнения Кортевега-де Фриза (KdF)*. Выяснилось, что эти явления объясняются наличием у таких систем бесконечного числа законов сохранения (П.Лакс). Решающую роль в развитии теории сыграли Московская школа (конечнозонные решения) и Ленинградская школа (гамильтонова теория).

7. **Квантовая теория поля.** Полиномы Шура образуют базис в фоковском пространстве в бозонном представлении. Они соответствуют полубесконечным мономам при бозон-фермионном соответствии (см. Kac-Raina), которое, с точки зрения теории представлений, является не чем иным как изоморфизмом двух типов конкретных представлений *алгебр Каца-Муди*.

Лекция 6. Группы $SU(2)$ и $SO(3)$ — геометрия, топология, инвариантная мера

1. **Определение $SU(2)$ и $SO(3)$.**

$$u \in SU(2) \iff u \in Matr(2\times 2), \quad u^*u = 1, \quad \text{где} \quad u^* = \overline{u'}, \quad \text{и} \quad \det u = 1,$$

$$u \in SO(3) \iff u \in Matr(3\times 3), \quad u'u = 1 \quad \text{и} \quad \det u = 1.$$

Задача 1.

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Следствие 1.

$$SU(2) \cong S^3$$

2. Группа G называется *группой Ли*, если на ней имеется структура гладкого многообразия, так что операции умножения и взятия обратного являются гладкими.

3. **Углы Эйлера.** Введем локальные (на самом деле – квазиглобальные, то есть покрывающие все, кроме 1-мерного подмногообразия) координаты в $SO(3)$. Выберем ортогональную систему координат $OXYZ$. Тогда любое собственное вращение g задается другой (так же ориентированной) системой координат $OX'Y'Z'$. Пусть l — прямая пересечения плоскостей $OXYZ$ и $OX'Y'Z'$.

Проделаем следующие операции:
— переведем ось OX в прямую l вращением плоскости OXY (при неподвижной OZ). Пусть φ_1 — угол поворота;
— переведем OZ в OZ' вращением плоскости OYZ при неподвижной OX; пусть θ — угол поворота;
— переведем OX в OX' при неподвижной OZ; пусть φ_2 — угол поворота.

В результате система координат $OXYZ$ перейдет в $OX'Y'Z'$. Матрица соответствующего преобразования (в системе координат $OXYZ$) есть $g = g_{\varphi_2} g_\theta g_{\varphi_1}$, где

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad g_\theta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Задача 2. *a) Проверить, что*

$$g = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \sin\varphi_1 \cdot \sin\theta & \cos\varphi_1 \cdot \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

b). Вычислить всю матрицу.

c). Доказать, что в последней строке стоят декартовы координаты точки P переходящей при вращении g в точку $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(Указание: таково свойство последней строки любой ортогональной матрицы).*

Таким образом, P — точка пересечения единичной сферы с осью OZ'. Пусть Q — точка пересечения единичной сферы с осью OX'. Точки P и Q вполне задают систему координат $OX'Y'Z'$, а следовательно, и вращение g. По ним восстанавливаются его углы Эйлера: φ_1 и θ — как сферические координаты точки P, а φ_2 — как угол между l и OQ.

4. **Накрытие $SU(2) \to SO(3)$.**

$$E = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

— пространство эрмитовых матриц с нулевым следом. Для $u \in SU(2)$ определим $P(u)\colon X \to uXu^{-1}$. Получим действие $SU(2)$ на E, при котором $(X, X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\det X$ сохраняется. Следовательно, $P(u) \in SO(3)$, то есть P — *гомоморфизм* $SU(2)$ *в* $SO(3)$.

Задача 3.

$$P\colon \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Следствие 2. *Гомоморфизм $P\colon SU(2) \to SO(3)$ сюръективен.*

Из определения P следует, что $P(u) = P(-u)$. Это видно и из задачи 3: если к φ и θ прибавить 2π, то слева все умножится на (-1), а справа не изменится.

Лемма 1. $\ker P = \{\pm E\}$.

Доказательство. $u \in \ker P \iff P(u)X = X,\ \forall X \in E \iff uXu^{-1} = X,\ \forall X \iff uX = Xu,\ \forall X$.

Теперь достаточно записать это условие для базисных X. Для $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$ получаем, что u коммутирует с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, следовательно u — диагональная матрица. Остается представить ее в виде $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix}$, $|z|^2 = 1$ и прокоммутировать с $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. □

Лемма в точности означает, что прообраз любой точки при отображении P состоит из двух точек. Это выражают словами *P является двулистным накрытием*, или $SU(2)$ — *двулистное накрытие* $SO(3)$.

5. **Инвариантная мера на $SO(3)$.**

Задача 4. *Инвариантная мера на сфере S^2 есть* $\sin\theta\, d\varphi d\theta$.

Нахождение инвариантной меры на $SO(3)$ в углах Эйлера делается чисто геометрически. Берем за параметры точки P и Q (см. пункт 3). P пробегает сферу и ей соответствует мера на сфере $\sin\theta\, d\varphi_1 d\theta$. Q пробегает большой круг, и ей соответствует $d\varphi_2$. Получаем $\sin\theta\, d\varphi_1 d\varphi_2 d\theta$. Вращения сохраняют как меру на сфере, так и длину дуги, поэтому построенная мера инвариантна.

6. **Подъем инвариантной меры с $SO(3)$ на $SU(2)$.** Ее можно поднять в силу накрытия (см. п. 4). Элементарными измеримыми множествами надо считать прообразы элементарных измеримых множеств на $SO(3)$, лежащие на одном листе (или связные). Если при этом элементарному множеству Z соответствует элементарные множества X и Y, то по определению $\mu(X) = \mu(Y) = \mu(Z)$.

Лекция 7. Представления компактных групп

1. **Вводные замечания.** На каждой компактной группе существует инвариантная мера, и притом только одна с точностью до нормировки. Мы будем пользоваться этой теоремой без доказательства. На рассматриваемых нами группах $SO(3)$ и $SU(2)$ мы построили инвариантную меру явно. В общем случае мы будем обозначать интеграл по инвариантной мере $\int f(g) d\mu(g)$, имея ввиду, что он берется по всей группе.

Для компактных групп верны теоремы об унитаризуемости (теорема 2 лекции 1) конечномерных представлений (существовании инвариантных эрмитовых произведений в представлениях). Для доказательства вместо суммирования по группе надо пользоваться инвариантным интегрированием. В качестве $C(G)$ берется пространство непрерывных функций на группе. В нем рассматривается инвариантное скалярное произведение $(\phi, \psi) = \int \phi(g)\overline{\psi(g)} d\mu(g)$. Свертка двух функций вводится с помощью формулы $(\phi * \psi)(g) = \int \phi(h)\psi(h^{-1}g) d\mu(h)$. С учетом этих замечаний теория представлений компактных групп полностью повторяет теорию представлений конечных групп за одним отличием: число классов неприводимых представлений у них бесконечно. Мы будем рассматривать компактные *группы Ли*, у которых число классов неприводимых представлений счетно.

2. **Теорема Петера–Вейля.** Матричные элементы конечномерных неприводимых представлений образуют ортогональную полную систему в $C(S)$ с нормировкой $\|\tau_{ij}\|^2 = \dfrac{1}{\dim \tau}$.

Доказательство. 1). Ортогональность и нормировка доказываются точно так же как в теореме 1 лекции 4 (соответствующей теореме для конечных групп).

2). Полнота бесконечной системы матричных элементов означает, что каждая функция из $C(G)$ может быть аппроксимирована конечными линейными комбинациями матричных элементов.

Мы дадим доказательство полноты только для *линейных* компактных групп (т. е. вложенных в полную линейную группу достаточно большой размерности). Это позволяет снова сослаться на аналогию с теорией представлений конечных групп. Именно, пусть $g \in G$ представлено матрицей $g = (g_{ij})$. Рассмотрим класс функций на G, представимых в виде полиномов от $\{g_{ij}, \overline{g_{ij}}\}$. Пусть $R_m(G)$ — пространство таких полиномов степени не выше m. Это пространство G-инвариантно и, в отличие от $C(G)$, конечномерно. Теперь точно так же как в доказательстве теоремы о разложении регулярного представления конечной группы (теорема 1 лекции 2) получаем, что любой элемент из $R_m(G)$ представим в виде линейной комбинации матричных элементов конечного числа неприводимых представлений. По теореме аппроксимации Вейерштрасса пространство полиномов всюду плотно в $C(G)$ в равномерной метрике. Следовательно, матричные элементы неприводимых конечномерных представлений — полная система. $\square$

Пример. Пусть $G = S^1$. Все неприводимые представления S^1 одномерны и имеют вид $\phi \mapsto e^{in\phi}$, где $\phi \in [0, 2\pi]$, а n — произвольное целое число. Любая непрерывная функция на окружности может быть представлена как непрерывная периодическая функция на прямой; мы не будем их различать. Следовательно, по теореме Петера-Вейля, любая периодическая функция на прямой может быть представлена как предел при $m \to \infty$ линейных комбинаций вида $f_m(\phi) = \sum_{n=-m}^{m} a_n(m) e^{in\phi}$. Мы даже доказали, что этот предел — равномерный. Из этого вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_m(\phi) e^{-in\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} d\phi$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. В левой части этого равенства выражение под знаком предела равно $a_n(m)$. Правая часть (обозначим ее a_n) называется коэффициентом Фурье функции f. Теперь уже легко доказать, что $f(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\phi}$. Этот ряд называется *рядом Фурье* функции f. Таким образом, для $G = S^1$ мы получаем из теоремы Петера-Вейля классическую *теорему о разложении непрерывной периодической функции в ряд Фурье.*

В общем случае ряды по бесконечным ортонормированным системам также принято называть *рядами Фурье.* Применяя те же соображения, что и в случае группы S^1, можно показать (по крайней мере, для *линейных* компактных групп), что *всякая непрерывная функция на G раскладывается, и притом единственным образом, в ряд Фурье по матричным элементам ее неприводимых представлений.* Иными словами,

$$C(G) = \bigoplus_{\tau \in \widehat{G}} M(\tau),$$

где, как и выше, $M(\tau)$ — пространство матричных элементов неприводимого представления τ, но здесь мы имеем дело со счетной прямой суммой.

3. **Гармонический анализ на S^2 — постановка задачи.** Следующим шагом в сторону обобщения является получение рядов Фурье на S^2 — единичной сфере пространства $\mathbb{R}^3$ (будем обозначать ее просто S). Эквивалентная формулировка этой задачи такова. Пусть $C(S)$ — пространство непрерывных функций на S. Его элементы называются *сферическими функциями*. Группа $SO(3)$ действует на S, следовательно, имеется естественное представление $SO(3)$ в $C(S)$. Назовем его *сферическим представлением*. Задача заключается в том, чтобы разложить это представление на неприводимые.

Лекция 8. Сферические функции Лапласа

Теория сферических функций Лапласа решает задачи о разложении сферического представления $SO(3)$ на неприводимые компоненты, о разложении функций на сфере в ряды Фурье. Ее роль этим не исчерпывается. Сферические функции Лапласа — один из наиболее распространенных видов *специальных функций*. В математической физике они возникают во всех задачах с симметрией относительно вращений (например, в задачах с кулоновским потенциалом).

1. **Гармонические полиномы в $\mathbb{R}^3$.** Пусть A — пространство полиномов от x_1, x_2, x_3, а A_m — подпространство полиномов степени m. Тогда $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$.

Мономы $\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}\}$ образуют базис в A: . Введем в A эрмитово произведение:

$$\langle x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}, \quad x_1^{k_1'} x_2^{k_2'} x_3^{k_3'} \rangle = k_1! k_2! k_3! \delta^{k_1 k_1'} \delta^{k_2 k_2'} \delta^{k_3 k_3'}$$

Лемма 1. *Операторы $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ сопряжены.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\frac{\partial}{\partial x_1} = (x_1)^*$, то есть $\langle x_1 u, v \rangle = \langle u, \dfrac{\partial}{\partial x_1} v \rangle$ для всех $u, v \in A$. Достаточно проверить последнее для базисных u, v. Пусть $u = x_1^{k_1 - 1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$, $v = x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$. Тогда с обеих сторон получим $k_1! k_2! k_3!$. В остальных случаях с обеих сторон нули. □

Элементы пространства $H \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \Delta a = 0\} = \ker \Delta$ называются *гармоническими полиномами*. Положим $H_m = H \cap A_m$.

Лемма 2. $A_m = H_m \oplus r^2 A_{m-2}$ *(ортогональная прямая сумма).*

Доказательство. Доказательство сводится к утверждению о том, что $\ker \Delta = (\operatorname{im} \Delta^*)^{\perp}$, что верно для любого оператора. Имеем $A_m = (\ker \Delta \oplus \ker \Delta^{\perp}) \cap A_m$. Далее, $\ker \Delta \cap A_m = H_m$, а $(\ker \Delta)^{\perp} \cap A_m = (\operatorname{im} r^2) \cap A_m = r^2 A_{m-2}$. □

Следствие 1. $A_m = H_m + r^2 H_{m-2} + r^4 H_{m-4} + \ldots$ *(всего $\left[\dfrac{m}{2} + 1\right]$ членов).*

2. **Сферические функции.** Определим отображение $\rho\colon A \to C(S)$, сопоставляя каждому полиному его ограничение на сферу $S = S^2$.

Лемма 3. $\ker \rho \cap A_m = \{0\}$.

Доказательство. Если однородный многочлен равен 0 на сфере, то он — нулевой. □

Определение. $U_m = \rho(H_m)$ *называется пространством сферических функций веса m.*

Следствие 2. $\rho(A_m) \cong U_m \oplus U_{m-2} \oplus \ldots$

Доказательство. Вытекает из следствия 1 леммы 2 с учетом того, что на сфере $r^2 = 1$. $\square$

3. **Собственные полиномы группы $SO(2) \subset SO(3)$.** Рассмотрим в $SO(3)$ стационарную подгруппу точки $(0, 0, 1)$. Обозначим ее G_0. Ясно, что $G_0 \cong SO(2)$.

Лемма 4. *Вращения из G_0 имеют в пространстве A_m базис общих собственных функций. Собственные значения имеют вид $e^{2\pi ik\varphi}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$, где φ — угол поворота, определяющий элемент из G_0. Кратность собственного значения $e^{2\pi ik\varphi}$ равна $\left[\frac{m-|k|}{2}+1\right]$.*

Доказательство. Положим $u = x_1 - ix_2$, $\overline{u} = x_1 + ix_2$, $z = e^{i\varphi}$, $h(z) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix} \in G_0$. Тогда $h(z)u = zu$, $h(z)\overline{u} = z^{-1}\overline{u}$.

Перейдем в A_m к базису $u^p\overline{u}^q x_3^l$ $(p+q+l=m)$. Относительно $h(z)$ моном $u^p\overline{u}^q x_3^l$ имеет собственное значение z^{p-q}. Имеем $|p-q| \leqslant p+q = m-l \leqslant m$. При фиксированном $p-q=k$ $p+q$ может меняться только на четное число, а вместе с ним и l. При этом $m-l = p+q \geqslant 0$. Поэтому l может принимать значения $m-|k|, m-|k|-2, m-|k|-4, \ldots$, всего $\left[\dfrac{m-|k|}{2}+1\right]$ значений. $\square$

Вычислим $\dim H_m$. Для кратности собственного значения z^k имеем по леммам 4 и 2:

$$mult_k H_m = mult_k A_m - mult_k A_{m-2} = \left[\frac{m-|k|}{2}+1\right] - \left[\frac{m-2-|k|}{2}+1\right] = 1$$

Таким образом H_m содержит каждое собственное значение z^k, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$ с единичной кратностью, $\dim H_m = 2m+1$ (число собственных значений).

4. **Основная теорема гармонического анализа на S^2.**

Теорема 1. *1°. $C(S) = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} U_m$ (ортогональная сумма).*

2°. U_m инвариантно относительно $SO(3)$, неприводимо, и $\dim U_m = 2m+1$.

3°. В U_m имеется ортогональный собственный относительно G_0 базис $Y_{m,0}, Y_{m,\pm 1}, \ldots, Y_{m,\pm m}$, причем $Y_{m,k}$ принадлежит собственному значению z^k.

Лемма 5. *Любое ненулевое конечномерное $SO(3)$-подпредставление в $C(S)$ имеет хотя бы одномерное подпространство G_0-инвариантов.*

Доказательство. Пусть $U \subset C(S)$ — подпредставление, $U_0 = \{f \in U \mid f(0,0,1) = 0\}$. Условие $f(0,0,1) = 0$ — это одно линейное условие на f. Следовательно, либо $U_0 = U$, либо U_0 — гиперплоскость в U.

Так как $U \neq \{0\}$, существует $\tilde{f} \in U$ и $x \in S$: $\tilde{f}(x) \neq 0$. Пусть $g \in SO(3)$ таково, что $g^{-1}x = (0,0,1)$. Тогда $(g\tilde{f})(0,0,1) = \tilde{f}(x) \neq 0$. Но $g\tilde{f} \in U$, поэтому $U_0 \neq U$, и в действительности U_0 — гиперплоскость. Следовательно $\dim U^{\perp} = 1$.

Ввиду того, что $G_0(0,0,1) = (0,0,1)$, подпространство U_0, а следовательно и $U_0^{\perp}$, инвариантно относительно G_0. Пусть $\tilde{f} \in U_0^{\perp}$. Тогда для любого $g \in G_0$ $g\tilde{f} = \lambda\tilde{f}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Но $(g\tilde{f})(0,0,1) = \tilde{f}(g^{-1}(0,0,1)) = \tilde{f}(0,0,1)$, то есть $\lambda = 1$. $\square$

Доказательство основной теоремы. 1°. Разложение в прямую сумму вытекает из следствия 2 и теоремы Вейерштрасса об аппроксимации (см. доказательство теоремы Петера-Вейля). Попарная ортогональность пространств

U_m требует отдельного доказательства (см. ниже), так как у нас нет сведений об изометричности отображения ρ (в $C(S)$, по определению, $(\phi, \psi) = \int_S \phi(s)\overline{\psi(s)}d\mu(s)$).

2°. Инвариантность U_m следует из перестановочности ρ с действием $SO(3)$ и инвариантности H_m, а последняя — из перестановочности Δ с действием $SO(3)$ (проверяется непосредственно).

Неприводимость U_m: размерность G_0-инвариантных векторов в H_m, а следовательно, и в U_m, равна 1. По лемме 5 в U_m может быть не более одного нетривиального подпредставления.

Ввиду леммы 3 $\dim U_m = \dim H_m = 2m + 1$.

3°. В качестве $Y_{m,k}$ возьмем образ вектора с собственным значением z^k в H_m. Ввиду простоты собственных значений, при данном m и различных k полученные векторы попарно ортогональны.

Пусть p — ортогональный проектор $U_m \to U_{m'}$. При инвариантном скалярном произведении p является морфизмом представлений. Если $m \neq m'$, то U_m и $U_{m'}$ не изоморфны ($\dim U_m \neq \dim U_{m'}$). Но они неприводимы, следовательно $p = 0$, то есть $U_m \perp U_{m'}$. □

$Y_{m,0}, Y_{m,\pm 1}, \ldots, Y_{m,\pm m}$ называются *сферическими функциями Лапласа* веса m: $Y_{m,0}$ — *зональной* сферической функцией, а остальные — *присоединенными* сферическими функциями.

Лекция 9. Элементы теории Ли

1. Свойства группы Ли во многом определяются свойствами гораздо более простого объекта — касательного пространства к ней в одной-единственной точке. Как это происходит — изучает теория Ли.

Пусть T_eG — касательное пространство в единице группы.

Теорема 1. *Гомоморфизм связной группы Ли G в группу Ли H определяется своим касательным отображением в единице.*

Доказательство. 1). Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм, $d\varphi\colon TG \to TH$ — касательное отображение (в произвольной точке), $l(g)$ — левый сдвиг на g в G, $l(h)$ — на h в H, $l(g)_*\colon T_eG \to T_gG$, $l(h)_*\colon T_eH \to T_hH$ — соответствующие касательные отображения.

Следующая диаграмма коммутативна в силу того, что φ — гомоморфизм:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\varphi"] \\ H \arrow[r, "l(\varphi(g))"'] & H \end{tikzcd}$$

Из нее вытекает коммутативность такой диаграммы:

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "l(g)_*"] \arrow[d, "d\varphi"'] & T_g(G) \arrow[d, "d\varphi"] \\ T_eH \arrow[r, "l(\varphi(g))_*"'] & T_{\varphi(g)}H \end{tikzcd}$$

Пусть $\xi \in T_eG$. Тогда из второй диаграммы вытекает

$$d\varphi(l(g)_*\xi) = l(\varphi(g))_* d\varphi(\xi). \qquad (1)$$

2). Пусть теперь $g \in G$. Мы хотим восстановить $\varphi(g)$, зная $d\varphi$. Соединим e и g гладкой кривой $g(t)$: $g(0) = e$, $g(1) = g$. Определим $\xi(t)$ из условия $g'(t) = l(g(t))_*\xi(t)$ и покажем, что $\xi(t) \in T_eG$. Применим соотношение (1):

$$d\varphi(g'(t)) = d\varphi(l(g(t))_*\xi(t)) = l(\varphi(g(t)))_* d\varphi(\xi(t))).$$

По определению $d\varphi(g'(t)) = \varphi(g(t))'$, то есть

$$\varphi(g(t))' = l(\varphi(g(t)))_* d\varphi(\xi(t)).$$

Введем обозначения $h(t) = \varphi(g(t))$, $\eta(t) = d\varphi(\xi(t))$. Получим $h'(t) = l(h(t))_*\eta(t)$, то есть дифференциальное уравнение на $h(t)$ первого порядка (где $l(h(t))_*$ — линейный оператор, зависящий от $h(t)$, $\eta(t)$ — известная величина). Например, для линейных групп это просто $h' = h\eta$. Поскольку $h(0) = e$, по теореме единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений $h(t)$ определено однозначно, то есть $\varphi(g(1)) = \varphi(g)$ определено однозначно.

□

2. **Скобка на T_eG.** Касательное пространство в единице группы Ли является векторным пространством. Если $x, y \in T_eG$, то существуют кривые $g = g(t)$ и $h = h(s)$, такие что $g(0) = h(0) = e$, $g'(0) = x$, $h'(0) = y$. Тогда $x + y$ является касательным к $g(t)h(t)$, а λx — к $g(\lambda t)$.

Кроме того, на T_eG канонически определена еще одна операция, называемая *скобкой*, или *коммутатором*:

$$[x, y] := \frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=t=0}. \tag{2}$$

В дальнейшем, для простоты, будем иметь дело только с линейными группами Ли. Тогда, дифференцируя в (2) по s и полагая $s = 0$, получим касательный вектор $gh'(0)g^{-1} - h'(0)$. Он принадлежит T_eG при всех t.

Затем, дифференцируя его по t, при $t = 0$ получим

$$\dot g(0)h'(0) - h'(0)\dot g(0) = [x, y]$$

(здесь мы используем точку для обозначения производной по t, и штрих для обозначения производной по s).

Следствие 1. *Для линейных групп* $[x, y] = xy - yx$.

Задача 1. $T_eSU(2) = \{X \in Matr(2, \mathbb{C})\colon X + X^* = 0, trX = 0\}$.
$T_eSO(3) = \{X \in Matr(3, \mathbb{R})\colon X + X' = 0\}$.

Задача 2. *Проверить для линейных групп, что*
$[X, Y]$ *— билинейная операция;*
$[X, Y] = -[Y, X]$ *(антисимметричность);*
$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ *(тождество Якоби).*

Определение. *Векторное пространство, в котором определена скобка, обладающая свойствами, сформулированными в задаче 2, называется алгеброй Ли.*

Выше мы показали, что T_eG наделено структурой алгебры Ли.

Определение. *Алгебра Ли T_eG называется алгеброй Ли группы G и обозначается* $\mathrm{Lie}(G)$.

Обозначения: $\mathrm{Lie}(SU(2)) = \mathfrak{su}(2)$, $\mathrm{Lie}(SO(3)) = \mathfrak{so}(3)$, $\mathrm{Lie}(SL(2)) = \mathfrak{sl}(2)$, $Lie(GL(V)) = \mathfrak{gl}(V)$.

Теорема 2. *Если $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм, то $d\varphi\colon \mathrm{Lie}\, G \to \mathrm{Lie}\, H$ — тоже.*

Доказательство. Пусть $g = g(t)$, $h = h(s)$, $g(0) = h(0) = e$. Имеем:

$$d\varphi(\frac{\partial}{\partial s}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=0}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial s}\varphi(ghg^{-1}h^{-1})_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1})_{s=0}.$$

Продифференцируем обе части по t и внесем слева дифференцирование по t под $d\varphi$ (это можно сделать, так как $d\varphi$ — линейное отображение).

$$d\varphi\left(\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}(ghg^{-1}h^{-1})_{s=t=0}\right) = \frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\left(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1}\right)_{s=t=0},$$

т. е. $d\varphi([x,y]) = [d\varphi(x), d\varphi(y)]$. □

3. **Соответствие между представлениями групп Ли и их алгебр Ли.** По определению представление группы G — это гомоморфизм $G \xrightarrow{T} GL(V)$. Для групп Ли этому гомоморфизму предъявляется требование гладкости.

Представлением алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее гомоморфизм в $\mathfrak{g}l(V)$, то есть такое линейное отображение $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l(V)$ что $\varphi([x,y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$.

В силу теоремы 2 каждому представлению T группы Ли сопоставляется представление ее алгебры Ли, которое мы обозначаем $\dot{T}$ или dT. По теореме 1 для связных групп представление алгебры Ли вполне определяет представление группы. Для односвязных групп между ними существует взаимно однозначное соответствие, но здесь мы этого не доказываем.

Следствие 2. *Для связных компактных линейных групп и их алгебр Ли каждый эндоморфизм представления алгебры Ли является и эндоморфизмом соответствующего представления группы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g} = Lie(G)$ и $\dot{T}(\xi)u = u\dot{T}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$. Надо показать, что $T(g)u = uT(g)$, $\forall g \in G$. Полагая $H = GL(V)$, рассмотрим уравнение $h'(t) = h(t)\eta(t)$, введенное в теореме 1. Имеем:

$$h'(t)u = h(t)\eta(t)u = (h(t)u)\eta(t);$$
$$uh'(t) = (uh(t))\eta(t),$$

то есть $h(t)u$ и $uh(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Так как $h(0) = e$, то $uh(0) = h(0)u = u$, то есть и начальное условие одно и то же. По теореме единственности $h(t)u = uh(t)$ для всех t. □

Следствие 3. *В условиях следствия 2: T и $\dot{T}$ приводимы или неприводимы одновременно.*

Доказательство. Нетривиально только, что если $\dot{T}$ приводимо, то и T приводимо. Для компактной группы $T(g)$ можно считать унитарным, а $\dot{T}(\xi)$ — кососимметрическим. Поэтому если $\dot{T}(\xi)V_0 \subset V_0$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ то и $\dot{T}(\xi)V_0^{\perp} \subset V_0^{\perp}$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$. Но тогда $\dot{T}(\xi)$ коммутирует с ортогональном проектором на V_0. По предыдущему следствию и $T(g)$ с ним коммутирует. То есть V_0 инвариантно относительно $T(g)$. □

Лекция 10. Представления $SU(2)$, $SO(3)$ и $\mathfrak{sl}(2)$

1. **От $\mathfrak{su}(2)$ к $\mathfrak{sl}(2)$: комплексификация.** Пусть $E = \{X \in Matr(2\times 2)\colon X = X^*,\ trX = 0\} \cong \mathbb{R}^3$. В лекции 6, пункт 4 дан общий вид матриц из E, из которого видно, что в E можно выбрать базис

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. $E_{\pm} = \frac{1}{2}(E_1 \mp iE_2)$, $H = -E_3$ — *базис в* $\mathfrak{sl}(2)$.
$H_1 = \frac{1}{2i}E_1$, $H_2 = \frac{1}{2i}E_2$, $H_3 = \frac{1}{2i}E_3$ — *базис в* $\mathfrak{su}(2)$.
(Указание: см. задачу 1 лекции 9).

Следствие 1. *Базисные элементы* $\mathfrak{sl}(2)$ *и* $\mathfrak{su}(2)$ *связаны следующим образом:*

$$E_{\pm} = H_2 \pm iH_1, \ H = -2iH_3.$$

Следствие 2. *1). Имеется взаимно однозначное соответствие между конечномерными представлениями* $\mathfrak{su}(2)$ *и* $\mathfrak{sl}(2)$*: всякое комплексное представление* $\mathfrak{su}(2)$ *продолжается до представления* $\mathfrak{sl}(2)$ *в том же пространстве; обратное соответствие дается операцией ограничения представлений* $\mathfrak{sl}(2)$ *на* $\mathfrak{su}(2)$.

2). Соответствующие представления приводимы или неприводимы одновременно.

Таким образом, классификация неприводимых представлений $\mathfrak{su}(2)$ сведена к классификации неприводимых конечномерных представлений $\mathfrak{sl}(2)$ (и наоборот). Эта идея фундаментальна. В ситуации общей комплексной (простой) алгебры Ли (у нас — $\mathfrak{sl}(2)$) и ее *компактной формы* (у нас — $\mathfrak{su}(2)$) она носит название *унитарный трюк Вейля.*

Базис E_+, E_-, H в $\mathfrak{sl}(2)$ называется *каноническим.* Для него имеется стандартное обозначение $E_+ = E$, $E_- = F$, H.

Задача 2. *Проверить, что*

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

и $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$.

2. Неприводимые конечномерные представления $\mathfrak{sl}(2)$.

Теорема 1. *Пусть* τ — *неприводимое конечномерное представление* $\mathfrak{sl}(2)$ *в* V. *Тогда существует такой базис* $v_0, \ldots, v_n$, *что*

1° $\tau(H)v_k = (n-2k)v_k$

2° $\tau(F)v_k = v_{k+1}$

3° $\tau(E)v_k = k(n-k+1)v_{k-1}$,

причем считается, что $v_{-1} = v_{n+1} = 0$.

Доказательство. 1). Пусть c — какое-нибудь собственное значение $\tau(H)$ в V, то есть $\tau(H)v = cv$. Тогда $\tau(E)v$ — собственный вектор с собственным значением $c+2$, а $\tau(F)$ — с собственным значением $c-2$. Действительно:

$$\tau(H)\tau(E)v = \tau(E)\tau(H)v + 2\tau(E)v = c\tau(E)v + 2\tau(E)v = (c+2)\tau(E)v.$$
$$\tau(H)\tau(F)v = \tau(F)\tau(H)v - 2\tau(F)v = (c-2)\tau(F)v.$$

2). Применяя к v $\tau(E)$ в разных степенях, будем получать линейно независимые векторы. Так как $\dim\tau < \infty$, то $\exists v_0 \neq 0 \colon \tau(H)v_0 = c_0v_0$, $\tau(E)v_0 = 0$.

3). Пусть $v_k = \tau(F)^k v_0$. В силу тех же соображений конечномерности существует такое n, что $v_0, v_1, \ldots, v_n \neq 0$, $v_{n+1} = 0$.

4). Соотношения 1° и 2° очевидны по построению, но пока с c_0 вместо n, то есть $\tau(H)v_k = (c_0 - 2k)v_k$.

Покажем, что для любого k существует такое $a_k \in \mathbb{C}$, что

$$\tau(E)v_k = a_k v_{k-1}. \qquad (1)$$

Применим индукцию по k. При $k=0$ $\tau(E)v_0 = 0$, то есть можно взять $a_0 = 0$.

Предположим, что $\tau(E)v_{k-1} = a_{k-1}v_{k-2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\tau(E)v_k &= \tau(E)\tau(F)v_{k-1} = \tau(F)\tau(E)v_{k-1} + Hv_{k-1} = \\ &= a_{k-1}\tau(F)v_{k-2} + (c_0 - 2(k-1))v_{k-1} = \\ &= (a_{k-1} + (c_0 - 2(k-1))v_{k-1}.\end{aligned}$$

Итак, $a_k = a_{k-1} + c_0 - 2(k-1)$. Таким образом, $a_k = \underbrace{[c_0 - 2(k-1)] + \dots + c_0}_{k \text{ членов}} + a_0$, причем $a_0 = 0$. Следовательно,

$$a_k = c_0 k - 2(1 + \dots + (k-1)) = c_0 k - k(k-1) = k(c_0 - k + 1). \quad (2)$$

5). Для $k = n+1$ все предыдущее тоже верно, поэтому $\tau(E)v_{n+1} = a_{n+1}v_n$. Но $a_{n+1} = 0$, так как $v_{n+1} = 0$. Теперь из (2) $(n+1)(c_0 - n) = 0$, откуда $c_0 = n$.

Все соотношения 1°, 2°, 3° доказаны.

□

Следствие 3. *Число n определяет неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ с точностью до изоморфизма. Оно называется старшим весом представления.*

3. **Представления $SU(2)$ — классификация.** Каждому неприводимому представлению $SU(2)$ соответствует неприводимое представление $\mathfrak{su}(2)$ (его касательное представление, см. лекцию 9), а тому, в свою очередь, представление $\mathfrak{sl}(2)$. Последние только что классифицированы. Осталось показать, что любое представление $\mathfrak{su}(2)$ может быть поднято на $SU(2)$.

Задача 3. *1). Естественному представлению $SL(2)$ в однородных полиномах степени n от двух переменных отвечает неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ старшего веса n.*

2). Каждое неприводимое представление $\mathfrak{su}(2)$ является касательным к представлению $SU(2)$ в однородных полиномах двух переменных.

Таким образом, соответствие между представлениями $SU(2)$ и $\mathfrak{su}(2)$ является взаимно однозначным.

Следствие 4. *Представления группы $SU(2)$ в однородных полиномах всех степеней от двух переменных дают полный список ее неприводимых представлений.*

4. **Представления $SO(3)$ — классификация.** Ввиду накрытия $SU(2) \to SO(3)$ каждому неприводимому представлению $SO(3)$ соответствует неприводимое представление $SU(2)$ в том же пространстве. Следовательно, все неприводимые представления $SO(3)$ содержатся среди построенных выше представлений $SU(2)$. В однородных полиномах степени n $\tau(-E) = (-1)^n \cdot id$. Такие представления не всегда спускаются на $SO(3)$. Таким образом неприводимые представления $SO(3)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с представлениями $SU(2)$ четного веса.

Лекция 11. Полиномы Лежандра

Владея информацией о неприводимых представлениях $SU(2)$, $SO(3)$ и $\mathfrak{sl}(2)$, мы можем вычислить в явном виде сферические функции Лапласа.

1. **Зональная сферическая функция $Y_{m,0}$.** $Y_{m,0}$ имеет вес 0, поэтому раскладывается по мономам вида $u^p\overline{u}^p x_3^l = (x_1^2 + x_2^2)^p x_3^l (2p + l = m)$. Пусть $\xi_{1,2,3} = \rho(x_{1,2,3})$ — функции, получающиеся ограничением евклидовых координат на сферу. Для них $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 - \xi_3^2$, поэтому $Y_{m,0}$ оказывается полиномом от ξ_3: $Y_{m,0}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = P_m(\xi_3)$. P_m называется полиномом Лежандра. Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ (область

изменения ξ_3 на сфере): $\int_{-1}^{1} P_m P_n d\xi_3 = 0$, $m \neq n$. Это связано с тем, что $Y_{m,0}$ при разных m ортогональны по сферической мере, последняя имеет вид $\sin\theta\, d\theta\, d\phi = -d\xi_3\, d\phi$ (в наших обозначениях (см. лекцию 6) $\xi_3 = \cos(\theta)$), и от ϕ подынтегральное выражение не зависит. Полиномы Лежандра можно найти явно, например с помощью процесса ортогонализации. Первые полиномы таковы: $P_0 = 1$, $P_1 = \xi_3$, $P_2 = 3\xi_3^2 - 1$.

2. **Присоединенные сферические функции.** Неприводимое представление $\mathfrak{sl}(2)$ (а значит, и $SU(2)$, и $SO(3)$) однозначно определяется своей размерностью (равной 1+вес).

Сферическое представление U_m неприводимо относительно $SO(3)$. Его размерность найдена в лекции 8 с помощью непосредственного рассмотрения гармонических полиномов, и оказалась равной $2m+1$. Таким образом, оно соответствует неприводимому представлению $\mathfrak{sl}(2)$ веса $2m$ (лекция 10).

Сферические функции $Y_{m,k}$ введены в лекции 8 как собственные векторы подгруппы

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset SO(3),$$

с собственным значением z^k, $z = e^{i\varphi}$, в пространстве U_m. Легко показать, что это то же самое, что собственные векторы оператора представления элемента H. Действительно, $Y_{m,k}$ является собственным вектором с тем же собственным значением относительно подгруппы $\widetilde{G}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \right\} \subset SU(2)$, накрывающей G_0 (задача 3 лекции 6). Дифференцируя по φ равенство

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} v = e^{ik\varphi} v \tag{3}$$

в точке $\varphi = 0$, убеждаемся, что собственному вектору с собственным значением z^k относительно $\widetilde{G}_0$ соответствует вектор веса $2k$ относительно H. Ввиду простоты спектра H в неприводимом представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, функции $Y_{m,k}$ с точностью до нормировки совпадают с каноническим базисом представления U_m, введенного в теореме 1 лекции 10. В частности, $Y_{m,m}$ имеет вес $2m$, то есть является вектором старшего веса в U_m.

В (3) мы опустили для простоты обозначение сферического представления. Сейчас нам будет удобнее его ввести. Пусть τ — сферическое представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. По теореме 1 лекции 10

$$Y_{m,\pm k} = \tau(E_\pm)^k Y_{m,0} \tag{4}$$

(тем самым мы определили нормировку $Y_{m,\pm k}$, отличную от нормировки канонического базиса).

Задача 1. *Рассмотрим представление $SO(3)$ в пространстве функций на $\mathbb{R}^3$ и ассоциированные представления $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{sl}(2)$. В этом представлении*

$$\tau(E_+) = (x_1 - ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Решение. Как обычно, реализуем $\mathbb{R}^3$ как пространство самосопряженных матриц с нулевым следом:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix},\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

и базисом

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то есть

$$E = \{x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3 | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Покажем, что для любого $U \in \mathfrak{su}(2)$

$$\tau(U) = \langle [U, X], \partial_X \rangle, \tag{5}$$

где ∂_X — градиент по x_1, x_2, x_3, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, ассоциированное с базисом E_1, E_2, E_3.

Пусть $u = u(t)\colon u(0) = id, \ u'(0) = U$. Тогда

$$\tau(U)f(X) = \frac{d}{dt}f(X(t))_{t=0}, \text{ где } X(t) = u(t)Xu(t)^{-1}. \tag{6}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{dx_2}{dt}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{dx_3}{dt}\frac{\partial}{\partial x_3} = \langle X'(t), \partial_X \rangle.$$

В соотношении (6) $t = 0$. Остается заметить, что $X'(0) = [U, X]$ и убедиться в справедливости (5).

Поскольку $\mathfrak{sl}(2)$ является линейной оболочкой $\mathfrak{su}(2)$ над $\mathbb{C}$, а правая часть соотношения (5) линейна по U, заключаем, что соотношение (5) выполняется для всех $U \in \mathfrak{sl}(2)$. В частности, для вычисления $\tau(E_+)$ достаточно заметить, что

$$[E_+, X] = \begin{pmatrix} -x_1 + ix_2 & -2x_3 \\ 0 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix} = (x_1 - ix_2)E_3 - x_3(E_1 - iE_2).$$

Отсюда и получаем искомое выражение для $\tau(E_+)$. □

3. **Вычисление** $Y_{m,\pm k}$. Пусть $\widetilde{Y}_{m,\pm k}$ — любой прообраз $Y_{m,\pm k}$ в $C(\mathbb{R}^3)$. Ввиду перестановочности ограничения на сферу $S \cong S^2$ с действием $SO(3)$,

$$\tau(E_+)Y_{m,\pm k} = (\tau(E_+)\widetilde{Y}_{m,\pm k})\big|_S.$$

В частности, можно взять $\widetilde{Y}_{m,0} = P_m(x_3)$ (это не однородный полином, в частности, $P_m(x_3) \notin H_m$).

Можно взять $\widetilde{Y}_{m,\pm k} = \tau(E_\pm)^k \widetilde{Y}_{m,0}$ (тогда после ограничения (4) будет соблюдено).

Используя задачу 1, найдем: $\widetilde{Y}_{m,1} = \tau(E_+)P_m(x_3) = (x_1 - ix_2)P'_m(x_3)$.

Когда будем искать $\widetilde{Y}_{m,2} = \tau(E_+)\widetilde{Y}_{m,1}$, надо учесть, что

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2})(x_1 - ix_2) = 0,$$

поэтому и

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2})((x_1 - ix_2)P'_m(x_3)) = 0,$$

следовательно, только член $(x_1 - ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}$ оператора $\tau(E_+)$ внесет свой вклад, и мы получим

$$\widetilde{Y}_{m,2} = (x_1 - ix_2)P''_m(x_3).$$

Аналогично

$$\widetilde{Y}_{m,\pm k} = (x_1 \mp ix_2)^k P_m^{(k)}(x_3).$$

Ограничивая на сферу, имеем:

$$Y_{m,\pm k} = (\xi_1 \mp \xi_2)^k P_m^{(k)}(\xi_3).$$

Лекция 12. Атом водорода. Периодическая система Менделеева

1. **Стационарное уравнение Шредингера.** Для одного электрона в центральном поле это уравнение имеет вид

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V(r)\right)\psi = E\psi,$$

$\hbar$ — постоянная Планка, μ — масса электрона, E — его энергия, ψ — волновая функция, или состояние электрона, $V = V(r)$ — потенциал. Оператор Δ введен в лекции 8 и называется *оператором Лапласа.* Уравнение описывает состояние электрона с энергией E. Для кулонова потенциала единичного заряда e (равного заряду электрона) $V(r) = -\frac{e^2}{r}$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi = (E + \frac{e^2}{r})\psi \tag{1}$$

Потенциал зависит только от радиуса. Поэтому перейдем к сферическим координатам.

Задача 1. *В сферических координатах уравнение (1) имеет вид*

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\varphi,\theta}\psi = -\frac{2\mu}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{r^2})\psi, \tag{2}$$

где

$$\Delta_{\varphi,\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

("радиальная часть" оператора Лапласа).

2. **Разделение переменных.** По теореме Петера–Вейля

$$\psi(\varphi,\theta,r) = \sum_{m,l} F_{m,l}(r)Y_{m,l}(\varphi,\theta)$$

где $Y_{m,l}$ — сферические функции. Преобразуем (2) к виду

$$H_r\psi + \Delta_{\varphi,\theta}\psi = 0,$$

где

$$H_r\psi = r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{r})\psi,$$

подставим сюда ряд для ψ:

$$\sum_{m,l}(H_rF_{m,l}(r))Y_{m,l} + \sum_{m,l}F_{m,l}(r)\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,l} = 0.$$

Лемма 1. $\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,l} = -m(m+1)Y_{m,l}$

Доказательство — См. п. 3.

Таким образом,

$$\sum(H_rF_{m,l}(r))Y_{m,l} = \sum m(m+1)F_{m,l}(r)Y_{m,l},$$

откуда $H_rF_{m,l} = m(m+1)F_{m,l}$. Следовательно, $F_{m,l}$ является решением уравнения

$$r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{r})F = m(m+1)F$$

(заметим, что l не входит в уравнение, то есть F не зависит от l).

Замечание. Можно было бы провести разделение переменных и без теоремы Петера–Вейля, сказав: " будем искать решения уравнения (2) в виде $\psi(\varphi,\theta,r) = F(r)Y(\varphi,\theta)$."

Теорема Петера–Вейля вместе с леммой 1 показывает, что полученные таким образом решения образуют полную систему.

3. **Оператор Лапласа в сферическом представлении.** Мы не будем делать разницы между обозначением элемента алгебры Ли и оператора его представления.

Задача 2. *Найти действие* H_1, H_2 *и* H_3 *в сферическом представлении и проверить, что*

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \Delta_{\varphi,\theta}.$$

Ответ. $H_1 = -(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi})$, $H_2 = -(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi})$, $H_3 = \frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Указания: 1). Пусть τ — сферическое представление. Тогда

$$(\tau(H_1)f)(x) = \frac{d}{dt}f(uXu^{-1})_{t=0} = (\varphi'(0)\frac{\partial}{\partial\varphi} + \theta'(0)\frac{\partial}{\partial\theta})f(X),$$

где $u(t) \in SU(2)$, $u(0) = 1$, $u_1'(0) = H_1$, $X = X(\varphi,\theta) \in S \subseteq E$, $X(t) = u(t)Xu(t)^{-1} = X(\varphi(t),\theta(t))$.

2). Сферические и эвклидовы координаты X связаны соотношением $x_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = \cos\theta$. Отсюда

$$x_1' = \cos\theta\cos\varphi\cdot\theta' - \sin\theta\sin\varphi\cdot\varphi',$$
$$x_2' = \cos\theta\sin\varphi\cdot\theta' + \sin\theta\cos\varphi\cdot\varphi',$$
$$x_3' = -\sin\theta\cdot\theta'.$$

3). С другой стороны, x_i' $(i = 1,2,3)$ — это координаты X как элемента пространства E: $X = x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3$. По определению

$$X'(0) = (u(t)Xu(t)^{-1})'_{t=0} = [H_1, X] =$$
$$= [\frac{1}{2i}E_1, x_1E_1 + x_2E_2 + x_3E_3] = -x_2E_3 + x_3E_2.$$

Таким образом, $x_1'(0) = 0$, $x_2'(0) = x_3 = \cos\theta$, $x_3'(0) = -x_2 = -\sin\theta\sin\varphi$. Подставляя это в предыдущую группу соотношений (между x_i', $(i = 1,2,3)$ и φ', θ'), выразим $\varphi'(0)$, $\theta'(0)$ через тригонометрические функции φ и θ.

Задача 3. *В любом представлении* $H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$ *коммутирует с* E_1, E_2 *и* E_3. Указание: использовать соотношения между $H_{1,2,3}$ и $E_{1,2,3}$ (лекция 10) и коммутационные соотношения $[E_1,E_2] = 2iE_3, [E_2,E_3] = 2iE_1$, $[E_3,E_1] = 2iE_2$.

Задача 4. $\Delta_{\varphi,\theta}$ *коммутирует с вращениями.*

Решение 1. Вывести из задачи 1. Оператор Δ инвариантен относительно $SO(3)$, а $\Delta_{\varphi,\theta}$ есть ограничение Δ на S^2.
Решение 2. Вывести из задач 2,3 и следствия 2 лекции 9.

Задача 5. $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = E_-E_+ + 2H + H^2$.

Следствие 1. $\Delta_{\varphi,\theta} = -\frac{1}{4}(E_-E_+ + 2H + H^2)$

Доказательство Леммы 1. Нам надо доказать, что $\Delta_{\varphi,\theta}\big|_{U_m} = -m(m+1)\cdot id$. По задаче 4 $\Delta_{\varphi,\theta}$ на неприводимом представлении скалярен. Поэтому достаточно вычислить его на каком-то одном векторе. Возьмем $Y_{m,m}$. Это старший вектор, то есть $E_+Y_{m,m} = 0$. Воспользуемся следствием из задачи 5

$$\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,m} = -\frac{1}{4}(2H + H^2)Y_{m,m}.$$

Но $HY_{m,m} = 2mY_{m,m}$, поэтому $\Delta_{\varphi,\theta}Y_{m,m} = -m(m+1)$ □

4. **Радиальное уравнение Шредингера (3).** Теория представлений не дает ничего для этого уравнения. Его исследование — область уравнений в частных производных. Сформулируем готовый результат (см., например, Фейнмановские лекции по физике, том 9).

Лемма 2. *Уравнение (3) имеет дискретное множество решений F_n, $n \geqslant m+1$, убывающих на бесконечности, причем решению F_n соответствует значение энергии*

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \textit{(формула Бора).}$$

Для неединичного заряда ядра z в числитель вошло бы z^2. Отрицательность энергии вызвана тем, что потенциал $V(r)$ равен 0 на бесконечности, следовательно, на конечном расстоянии энергия отрицательна. Убывание на бесконечности соответствует связанному электрону (то есть электрону атома).

Номер энергетического уровня n называется *главным квантовым числом.*

5. **Вырождение главного квантового числа и длина периодов таблицы Менделеева.** При фиксированном n те собственные функции $Y_{m,l}$, которые могут давать это n, удовлетворяют неравенству $m < n$ (лемма 2). Мы знаем, что $\dim U_m = 2m+1$. Следовательно, "вырождение" уровня энергии E_n (то есть размерность соответствующего собственного пространства оператора Шредингера) равна

$$\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) = n^2.$$

С учетом спина получаем $2n^2$ состояний с данной энергией.

Для числа состояний на первых уровнях энергии имеем

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$
$$2n^2 = 2, 8, 18, 32, \dots$$

Это в точности длины периодов таблицы Менделеева. Оно и неудивительно, так как химические свойства в основном определяются внешней электронной оболочкой, а $2n^2$ — это число различных состояний электронов в оболочке уровня E_n.

Однако, в таблице Менделеева имеется 2 периода по 8: второй и третий, и 2 по 18. Объясним это.

6. **Заполнение электронных оболочек.** Итак, каждому значению главного квантового число отвечает n^2 функций $Y_{m,l}$ с $m < n$. Физики называют m *азимутальным квантовым числом*, или *квантовым числом полного момента.* Состояние с $m = 0$ называется s-состоянием, с $m = 1$ — p-состояниями, с $m = 2$ — d-состояниями, с $m = 3$ — f-состояниями, и т. д. Например, состояние $2p$ — это состояние с $n = 2$ и $m = 1$. Оказывается, s-состояния "энергетически выгоднее" d-состояний, так как вероятность нахождения вблизи ядра у них больше (см. рис.). Аналогично, p выгоднее d, и так далее.

Поэтому с ростом атомного номера s-состояния как правило заполняются раньше p-состояний, p-состояния раньше d-состояний, и так далее.

Если пренебречь межэлектронным взаимодействием, или учитывать его в теории возмущений, то теория одноэлектронного атома до какой-то степени объясняет свойства многоэлектронных атомов. Рассмотрим начало таблицы Менделеева (см. таблицу).

Первый период имеет длину 2, так как единственная энергетически выгодная оболочка $1s$ заполняется 2 электронами.

Электронные конфигурации первых 30 элементов

(число электронов в разных состояниях)

Z	Элемент	W, эВ	Электронная конфигурация									
			1*s*	2*s*	2*p*	3*s*	3*p*	3*d*	4*s*	4*p*	4*d*	4*f*
1	H водород	13,6	1									
2	He гелий	24,6	2									
3	Li литий	5,4		1							активный металл	
4	Be бериллий	9,3		2								
5	B бор	8,3		2	1							
6	C углерод	11,3	Заполнены	2	2							
7	N азот	14,5	(2)	2	3							
8	O кислород	13,6		2	4							
9	F фтор	17,4		2	5							
10	Ne неон	21,6		2	6						инертный газ	
11	Na натрий	5,1				1					активный металл	
12	Mg магний	7,6				2						
13	Al алюминий	6,0				2	1					
14	Si кремний	8,1	Заполнены			2	2					
15	P фосфор	10,5				2	3					
16	S сера	10,4	(2)	(8)		2	4					
17	Cl хлор	13,0				2	5					
18	Ar аргон	15,8				2	6				инертный газ	
19	K калий	4,3							1		активный металл	
20	Ca кальций	6,1							2			
21	Sc скандий	6,5						1	2		редкие земли	
22	Ti титан	6,8						2	2			
23	V ванадий	6,7		Заполнены				3	2			
24	Cr хром	6,8						5	1			
25	Mn марганец	7,4	(2)	(8)		(8)		5	2			
26	Fe железо							6	2		группа	
27	Co кобальт	7,9						7	2		железа	
28	Ni никель	7,6						8	2			
29	Cu медь	7,7						10	1			
30	Zn цинк	9,4						10	2			

В двух следующих периодах длины по 8 каждый строение внешних оболочек одно и то же, поэтому соответствующие элементы этих периодов идентичны по химическим свойствам и периодический закон Менделеева выполняется идеально (" химические свойства вещества находятся в периодической зависимости от атомного веса"). Все это происходит потому, что $2s$, $2p$ и $3s$, $3p$ состояния заполняются вполне аналогично.

В 4-м периоде возникают аномалии. Оболочка $4s$ оказывается энергетически выгоднее, чем $3d$. Потому заполняется прежде всего она, а $3d$ — вслед за ней. Ввиду близости энергетических уровней $4s$ и $3d$, это правило нарушается для Cr и Cu (за счет следующего приближения теории возмущений).

Редкоземельные металлы, и элементы группы железа обладают сходными химическими свойствами ввиду идентичности строения внешней оболочки. Различия обусловлены близко лежащей $3d$ оболочкой. Но, как и предыдущие периоды, этот начинается с активного металла (K), имеющего всего 1 электрон на внешней оболочке, и заканчивается инертным криптоном (элемент номер 36).

Мы указали в таблице только первые 12 из 18 элементов четвертого периода. Для остальных оболочки $3d$ и $4s$ заполнены (как у последнего в таблице элемента — цинка) и происходит заполнение оболочки $4p$, что и дает недостающие 6 элементов.

В конечном счете, как мы видим, химические свойства элементов объясняются в терминах старших весов представлений $\mathfrak{su}(2)$ $(s, p, d, \ldots)$.