Некоторые сведения о квадратах Стинрода

М.Э. Казарян

Рассмотрим градуированное кольцо многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1,\dots,t_n]$, $\deg t_i = 1$, где $n \gg 0$ — фиксированное натуральное число (оно является также кольцом Z_2-когомологий пространства $P^\infty \times \ldots \times P^\infty$, но пока это не важно). Обозначим через Sq автоморфизм этого кольца, заданный на образующих равенством $\mathrm{Sq}\, t_i = t_i + t_i^2$. Этот автоморфизм неоднородный. Обозначим через Sq^k соответствующие однородные составляющие $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \dots$.

Алгебра, порожденная эндоморфизмами Sq^k, называется *алгеброй Стинрода* $A^* = A^0 \oplus A^1 \oplus A^2 \oplus \dots$. Более точно, образующими в этой (ассоциативной некоммутативной) алгебре над $\mathbb{Z}_2$ служат символы $\mathrm{Sq}^1, \mathrm{Sq}^2, \dots$, а соотношениями служат те выражения от образующих, которые задают тривиальные эндоморфизмы кольца многочленов $\mathbb{Z}_2[t_1,\dots,t_n]$ для всех n.

Задача. Покажите, что A^* сохраняет подкольцо симметрических многочленов, и вычислите $\mathrm{Sq}^k\omega_m$, где ω_m — m-я элементарная симметрическая функция от переменных $t_1,\dots,t_n$ (ответ, данный в книге Фоменко и Фукса, неверен).

Задача. Положим $u = \omega_n = t_1 \dots t_n$. Покажите, что всякий многочлен вида $a\,u$ делится на u, где $a \in A^*$. Покажите, что A^*u порождено многочленами вида $\mathrm{Sym}\,(t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n})\,u$, где для каждый из показателей k_i имеет вид 2^p-1. Выведите отсюда, что в качестве $\mathbb{Z}_2$-базиса в A^* можно взять итерированные операции вида $\mathrm{Sq}^{i_k}\dots\mathrm{Sq}^{i_1}$, где $i_k \geqslant 2i_{k-1},\dots,i_2 \geqslant 2i_1$.

Мономы от Sq^k такого вида, как в задаче, называются *допустимыми*. Из задачи вытекает, что всякое произведение вида $\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b$ при $a < 2b$ выражается через допустимые.

Задача. Выпишите однородный базис в компонентах A^k алгебры Стинрода при $k \leqslant 10$.

Задача. Докажите соотношения Адема: при $a < 2b$

$$\mathrm{Sq}^a\mathrm{Sq}^b = \sum_{c=0}^{\frac{a+b}{3}} C_?^?\,\mathrm{Sq}^{a+b-c}\mathrm{Sq}^c.$$

Задача. Обозначим $\mathrm{Sq} = 1 + \alpha$. Выразите через допустимые мономы однородные составляющие до степени 5 ряда $(\mathrm{Sq})^{-1} = 1 - \alpha + \alpha\,\alpha - \alpha\,\alpha\,\alpha + \dots$.

Задача. Вычислите однородные составляющие до степени 5 абстрактного *класса Ву* $v = \mathrm{Sq}^{-1}\omega$, где $\omega = 1 + \omega_1 + \omega_2 + \dots$.

Обозначим $\mathcal{M} = \mathcal{M}^0 \oplus \mathcal{M}^1 \oplus \dots = \lim\limits_{N} \overline{H}^{N+*}(MO(N),\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[\omega_1,\omega_2,\dots]\,u$. Пространство $\mathcal{M}$ можно рассматривать как модуль над кольцом $H^*(BO) = \mathbb{Z}_2[\omega_1,\omega_2,\dots]$, где образующей u служит класс Тома. Квадраты Стинрода действуют в $\mathcal{M}$ по правилу

$$\mathrm{Sq}^k\omega_m = \sum_{i=0}^{k} C_?^?\,\omega_{k-i}\omega_{m+i}, \qquad \mathrm{Sq}^k u = \omega_k u.$$

Задача. Докажите, что алгебра Стинрода действует свободно в $\mathcal{M}$; укажите какую-нибудь систему свободных образующих этого действия.

Вычисления последней задачи являются центральными для определения гомотопических групп пространств $MO(N)$, а следовательно, для вычисления групп кобордизмов Ω_n. А именно, образующие A^*-модуля $\mathcal{M}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{Z}_2$-образующими групп $\Omega_* = \pi_{N+*}(MO(N))$, $N \to \infty$.

Обозначим через $\mathcal{M}_+ = A^{>0}\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ подпространство, порожденное элементами, получаемыми нетривиальными комбинациями квадратов Стинрода. Тогда утверждение предыдущей задачи можно переформулировать следующим образом: *пусть $e_1, e_2, \ldots$ — базис над $\mathbb{Z}_2$ векторного пространства $\mathcal{M}/\mathcal{M}_+$. Тогда эти же элементы e_i могут служить свободной системой образующих A^*-модуля $\mathcal{M}$.*

Обозначим через y_i многочлены $\sum t^i$ (выраженные через элементарные симметрические ω_k). Выберем те из них, для которых $i+1$ *не является степенью двойки.*

Задача. Докажите изоморфизм $\mathcal{M}/\mathcal{M}_+ \cong \mathbb{Z}_2[y_2, y_4, y_5, y_6, y_8, \ldots]u$. Таким образом, в качестве системы свободных образующих A^*-модуля $\mathcal{M}$ можно взять всевозможные мономы от y_i.

Квадраты Стинрода Sq^k действуют в $\mathbb{Z}_2$-когомологиях произвольного топологического пространства как стабильные когомологические операции. Через них выражаются классы Штифеля-Уитни векторных расслоений.

Задача. Пусть $E \to X$ — векторное расслоение ранга n. Докажите, что при изоморфизме Тома $t : H^k(X, \mathbb{Z}_2) \stackrel{\cong}{\to} H^{n+k}(TE, \mathbb{Z}_2)$ класс Штифеля-Уитни $\omega_k(E)$ переходит в k-й квадрат Стинрода класса Тома $u = t(1)$,

$$\omega_k(E) \cdot u = \mathrm{Sq}^k u \in H^{k+n}(X, \mathbb{Z}_2).$$

Обратно, квадраты Стинрода выражаются через классы Штифеля-Уитни (в когомологиях многообразий).

Задача. Пусть M — гладкое многообразие. Предположим, что сингулярный цикл, двойственный по Пуанкаре данному классу когомологий $\alpha \in H^*(M, \mathbb{Z}_2)$, представлен гладким собственным отображением $f : N \to M$, $\deg \alpha = \dim M - \dim N$ (т.е. $\alpha = f_* 1$). Докажите, что тогда

$$\mathrm{Sq}^k \alpha = f_* \omega_k(f),$$

где относительные классы Штифеля-Уитни $\omega_k(f) \in H^*(N, \mathbb{Z}_2)$ отображения f задаются формальным равенством $\omega(f) = \omega(f^*TM - TN) = \frac{f^*\omega(TM)}{\omega(TN)}$. (Указание: рассмотрите сперва случай, когда $N \subset M$ — подмногообразие и f — вложение.)

Классом Ву $v = 1 + v_1 + v_2 + \ldots$ многообразия M называется класс $v = \mathrm{Sq}^{-1}\omega(M)$. Очевидно, классы Штифеля-Уитни многообразия $\omega_k(M)$ выражаются через классы Ву v_i при помощи квадратов Стинрода.

Теорема (формула Ву). *Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n. Тогда для всякого k гомоморфизм $\mathrm{Sq}^k : H^{n-k}(M, \mathbb{Z}_2) \to H^n(M, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ совпадает с гомоморфизмом, задаваемым умножением на v_k.*

Формулу Ву можно применять, в частности, к характеристическим классам многообразия. Поскольку действие Sq^k на классы Штифеля-Уитни нам известно, из формулы Ву вытекают универсальные соотношения между характеристическими числами многообразий. Например, для всякого 2-мерного многообразия выполняется равенство $\omega_1^2(M) = \omega_2(M)$.

Задача. Найдите соотношения между характеристическими числами n-мерных многообразий при $n = 3, 4$.

Другим способом соотношения между характеристическими числами можно получить следующим способом. Пусть χ — многочлен взвешенной степени n от образующих ω_i. Для всякого замкнутого n-мерного многообразия M обозначим через $\chi_\nu(M)$ соответствующее характеристическое число, в котором в качестве ω_i берутся не касательные, а *нормальные классы Штифеля-Уитни* $\omega_i(\nu_M)$, определяемые равенством $\omega(\nu_M)\omega(M) = 1$.

Задача. Пусть $\chi u \in \mathcal{M}_+$. Докажите, что тогда $\chi_\nu(M) = 0$ для всякого замкнутого многообразия M.

Задача. Докажите, что модуль соотношений между характеристическими числами многообразий, описанный в предыдущей задаче, совпадает с модулем соотношений, вытекаемых из формулы Ву.