Листок 1. Гомотопии. CW-комплексы (11 сентября)

1. Докажите, что любое непрерывное отображение $S^n \to S^m$, где $n < m$, гомотопно постоянному отображению.

2. Докажите, что $S^p \times S^q / S^p \bigvee S^q \approx S^{p+q}$.

3. Докажите, что $S^p \times S^q \setminus pt \sim S^p \bigvee S^q \quad (p, q \geqslant 1)$.

4. Пусть $X^0 = S^1 = \partial D^2$ — дискретный набор точек; $X^1 = X^0$, а $X^2 = X$ получается приклеиванием D^2 к X^0 по тождественному отображению $S^1 \to S^1$. Выполняются ли для пространства X свойства (c) и (w)?

5. Пусть S^1_n — окружность радиуса $1/n$ с центром $(0,\, 1/n)$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^1_n$; топология пространства X индуцирована из $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим естественное взаимно однозначное отображение $f : X \to Y$, где Y — CW-комплекс с одной 0-мерной клеткой и приклеенными к ней (обоими концами) клетками D^1_n, $n = 1,\, 2, \ldots$ Докажите, что отображение f не является гомеоморфизмом.

6. Докажите, что любое компактное подмножество CW-комплекса пересекает лишь конечное число клеток.

7. Представьте в виде CW-комплекса пространство единичных касательных векторов к сфере с g ручками. (**Указание**. Воспользуйтесь векторным полем с одной особой точкой на сфере с g ручками.)

8. Докажите, что если $Y \subset X$ — стягиваемый подкомплекс, то $X/Y \sim X$.

9. Пусть A и B — связные CW-комплексы с отмеченными точками a_0 и b_0. Докажите, что $A * B \sim \Sigma(A \wedge B)$, где $A \wedge B = A \times B / A \vee B$ и $A \vee B = (\{a_0\} \times B) \bigcup (A \times \{b_0\})$.

10. а) Докажите, что $\Sigma(S^1 \times S^1) \sim S^2 \bigvee S^2 \bigvee S^3$.

б) Докажите, что если X и Y — CW-комплексы, то $\Sigma(X \times Y) \sim \Sigma X \bigvee \Sigma Y \bigvee \Sigma(X \wedge Y)$.