Листок 5. Гомотопически простые пространства. H-пространства (9 октября)

46. Пусть X — CW-комплекс, X^n — его n-мерный остов. Докажите, что вложение $i : X^n \to X$ индуцирует изоморфизм $i_* : \pi_k(X^n, x_0) \to \pi_k(X, x_0)$ при $k < n$ и эпиморфизм при $k = n$.

Если каждый элемент группы $\pi_1(X, x_0)$ индуцирует тождественный автоморфизм группы $\pi_n(X, x_0)$, то пространство X называют *гомотопически n-простым.*

47. Докажите, что пространство гомотопически 1-просто тогда и только тогда, когда его фундаментальная группа коммутативна.

При решении задач 48 и 49 можно считать известным, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

48. Докажите, что при $n \geqslant 2$ группа $\pi_n(S^n \bigvee S^1, x_0)$ является свободной абелевой группой с бесконечным (счётным) набором образующих.

49. Докажите, что пространство $S^n \bigvee S^1$ не является гомотопически n-простым.

Топологическое пространство X с отмеченной точкой $x_0 \in X$ называют *H-пространством*, если задано непрерывное отображение $\mu : X \times X \to X$, для которого отображения $x \mapsto \mu(x, x_0)$ и $x \mapsto \mu(x_0, x)$ гомотопны тождественному отображению (предполагается, что $\mu(x_0, x_0) = x_0$). Отображение μ называют при этом *умножением.*

50. Докажите, что пространства $\mathbb{C}P^\infty$ и $\mathbb{R}P^\infty$ являются H-пространствами.

51. Докажите, что любое пространство петель является H-пространством.

52. Докажите, что сфера S^7 является H-пространством.

53. Докажите, что если X — H-пространство с отмеченной точкой x_0, то группа $\pi_1(X, x_0)$ абелева.

54. Докажите, что любое H-пространство X гомотопически просто (т.е. гомотопически n-просто для любого натурального n).