1. (**а**) Докажите, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ совпадает со своим коммутантом. (**б**) Найдите центр Z этой группы. (**в**) Докажите, что фактогруппа $SL(2,\mathbb{C})/Z$ проста.

Факторгруппа группы $SL(2,F)$ по её центру обозначается $PSL(2,F)$.

2. Найдите порядок группы (**а**) $SL(2,\mathbb{F}_q)$; (**б**) $PSL(2,\mathbb{F}_q)$.

3. Докажите, что (**а**) $PSL(2,\mathbb{F}_2)\simeq S_3$; (**б**) $PSL(2,\mathbb{F}_3)\simeq A_4$;
(**в**) $PSL(2,\mathbb{F}_4)\simeq A_5$; (**г**)* $PSL(2,\mathbb{F}_5)\simeq A_5$; (**д**)* $PSL(2,\mathbb{F}_9)\simeq A_6$.

4. (**а**) Докажите, что группа $\mathbb{C}^*=GL(1,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна окружности. (**б**) Докажите, что группа $SL(2,\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна окружности. (**в**) Докажите, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна трёхмерной сфере (в частности, односвязна).

5. Докажите, что SO_2 (соотв. SU_2) — максимальная компактная подгруппа в группе $SL(2,\mathbb{R})$ (соотв. $SL(2,\mathbb{C})$).

6. Докажите, что множество смежных классов $SL(2,\mathbb{R})/SO_2$ естественно отождествляется с плоскостью Лобачевского. Что соответствует прямым на плоскости Лобачевского при этом отождествлении? Как выглядит аналогичное утверждение для смежных классов $SL(2,\mathbb{C})/SU_2$?

Напоминание. На кольце $A=C(G)$ функций на группе G есть коумножение $\mu\colon A\to A\otimes A\sim C(G\times G)$, $(\mu(f))(g_1,g_2)=f(g_1g_2)$ (знак $\sim$ означает, что надо придать правильный (согласованный) смысл символам $C(G)$ и $\otimes$). Для каждого $f\in A$ существуют $f_k^{(\varepsilon)}\in A$ ($\varepsilon=1,2$), такие что $\mu(f)=\sum_k f_k^{(1)}\otimes f_k^{(2)}$.

7. (**а**) Обозначим через A кольцо функций на группе $GL(2,\mathbb{C})$, т. е. $\mathbb{C}[a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^{-1}]$. Определите, куда переходят образующие A при коумножении. Проверьте, что это отображение определено корректно, т. е. $\mu((a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^{-1})=\mu(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^{-1}$.

(**б**) (Продолжение) Решите ту же задачу для группы $SL(2,\mathbb{C})$ (для которой кольцо функций есть $\mathbb{C}[a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\mid a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1]$).

Напоминание. Обозначим через $U=U(GL(2,\mathbb{C}))$ множество распределений на группе $GL(2,\mathbb{C})$, сосредоточенных в единице, т. е. множество линейных функционалов (на кольце функций), значение которых на функции зависит только от значения функции и (конечного числа) её производных в единице группы. При этом следствием наличия коумножения в кольце функций является наличие умножения $U\otimes U\to U, X\otimes Y\mapsto XY, (XY)(f)=(X\otimes Y)(\mu(f))=\sum_k X(f_k^{(1)})Y(f_k^{(2)})$.

8. Рассмотрим распределения $X_{ij}(f)=\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}|_{A=E}$, Вычислите $X_{ij}X_{kl}$, $[X_{ij},X_{kl}]=X_{ij}X_{kl}-X_{kl}X_{ij}$, $1\leqslant i,j,k,l\leqslant 2$.