Напоминание. Одномерная формальная группа задаётся своим групповым законом — степенным рядом $G(x,y)$, таким что

- $G(x,0)=x, G(0,y)=y$;
- $G(x,G(y,z))=G(G(x,y),z)$.

1. Рассмотрим одномерную формальную группу $G(x,y) = x+y+ + \sum_{i,j>0} a_{ij}x^iy^j$. Будем считать, что основное поле есть $\mathbb{C}$.

(**а**) (Обратный элемент) Докажите, что существует единственный формальный ряд $\varphi(x)$, такой что $G(x,\varphi(x)) = G(\varphi(x),x)=0$.

(**б**) Докажите, что существует замена переменной, «убивающая квадратичную часть», т. е. приводящая G к виду $x+y+\sum_{i,j>0, i+j\neq 2} a_{ij}x^iy^j$.

(**в**) Найдите формальную замену координат, отождествляющую формальные законы $G_1(x,y)=x+y+xy$ и $G_2(x,y)=x+y$.

(**г**) Опишите все одномерные формальные группы с точностью до формальных замен координат.

Напоминание. Пусть $f(x)$ — формальный ряд. Левый сдвиг на y этого ряда с помощью формального группового закона G — это, по определению, ряд от переменных x,y $L_y(f)=f(G(y,x))$. Формальное векторное поле $V=p(x)\frac{d}{dx}$ называется левоинвариантным относительно G, если $L_yV=VL_y$, т. е. для всех формальных рядов $h(x)$ $L_y(p(x)\frac{dh}{dx}) = p(x)\frac{dL_y(h)}{dx}$.

(**д**) Докажите, что для одномерной формальной группы существует левоинвариантное векторное поле $V=p(x)\frac{d}{dx}$, такое что $p(0)=1$, причём оно порождает векторное пространство левоинвариантных полей.

2. Приведите пример некоммутативной двумерной формальной группы.

3. Докажите, что если скобка на векторном пространстве кососимметрична, то для любых трёх линейно зависимых векторов выполнено тождество Якоби.

4. Опишите все (**а**) одномерные (**б**) двумерные алгебры Ли над $\mathbb{C}$.

5. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2$ и алгебра векторов трёхмерного пространства с векторным произведением изоморфны над $\mathbb{C}$, но неизоморфны над $\mathbb{R}$. Изоморфны ли они над $\mathbb{F}_5$?

6. Опишите (над $\mathbb{C}$) все алгебры Ли $\mathfrak{g}$, для которых коммутант $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ одномерен.