1. Вычислите структурные константы (ассоциативной) алгебры дифференциальных операторов на прямой, т.е. найдите A^{ijkl}_{rs}, для которых

$$x^i\partial^j \circ x^k\partial^l = \sum_{i,j,k,l} A^{ijkl}_{rs} x^r\partial^s.$$

2. Докажите, что (ассоциативная алгебра) дифференциальных операторов на прямой проста (не содержит нетривиальных двусторонних идеалов). Проста ли алгебра Ли Dif_1 (по определению, состоящая из дифференциальных операторов на прямой с операцией коммутатора)?

3. Укажите в алгебре Ли Dif_1 три подалгебры Ли, изоморфные $\mathfrak{sl}_2$.

4. Алгебра псевдодифференциальных операторов состоит из всех сумм вида

$$\sum_{k=-\infty}^{N} p_k(x)\partial^k, \qquad (1)$$

где $p_k(x)$ — многочлены (или многочлены Лорана) от x.

(**а**) Определите на этой алгебре ассоциативное умножение, продолжающее обычное умножение дифференциальных операторов.

(**б**) Докажите, что в алгебре псевдодифференциальных операторов для любого оператора вида $A = \partial^k + a(x)\partial^{k-1} + \ldots$

- существует обратный оператор $A^{-1} = \partial^{-k} + b(x)\partial^{-k-1} + \ldots$, для которого $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$;
- существует оператор $A^{1/k} = \partial + c(x) + \ldots$, для которого $(A^{1/k})^k = A$.

(**в**) Докажите, что псевдодифференциальные операторы, коммутирующие с оператором $A = \partial^k + a(x)\partial^{k-1} + \ldots$, имеют вид

$$\sum_{p=-\infty}^{N} a_p A^{p/k},$$

где a_i — константы.

5. (**а**) Докажите, что алгебра Ли Dif_1 совпадает со своим коммутантом. Верно ли это для алгебры псевдодифференциальных операторов в случае, если в (1) $p_i(x)$ — (**б**) многочлены; (**в**) многочлены Лорана? Найдите в каждом из этих случаев размерность факторпространства по коммутанту.