1. (**а**) Представьте оператор $(\partial + x)^n$ в виде линейной комбинации операторов $x^i\partial^j$. (Указание. В ответ входят многочлены $p_k(x) = e^{-x^2/2}\partial^k(e^{x^2/2})$.)

(**б**) Тот же вопрос для оператора $(\partial + f(x))^n$.

(**в**) (Что такое $(\partial + x)^s$?) Предложите формулу вида

$$(\partial + x)^s = \partial^s + a_1(x)\partial^{s-1} + a_2(x)\partial^{s-2} + \dots ,$$

имеющую смысл при всех комплексных s и верную для всех целых s (в алгебре псевдодифференциальных операторов).

2. Вычислите (**а**) $\exp(\partial)$; (**б**) $\exp(\partial + f(x))$.

Для псевдодифференциального оператора A обозначим через A_+ дифференциальный оператор, который получается из A отбрасыванием слагаемых, содержащих отрицательные степени ∂.

3. Положим $L = \partial^2 + u(x)$. Вычислите (**а**) $(L^{1/2})_+$; (**б**) $(L^{3/2})_+$; (**в**) $(L^2)_+$; (**г**) $(L^{5/2})_+$.

4. (Продолжение) Докажите, что коммутатор дифференциального оператора P с L имеет нулевой порядок, т. е. есть оператор умножения на функцию, если и только если P — линейная комбинация с постоянными коэффициентами операторов вида $(L^{n/2})_+, n \geqslant 0$.

5. Пусть функция u зависит также от времени, $u = u(t, x)$. Выпишите явно, какое уравнение на эту функцию следует из равенства

$$\frac{dL}{dt} = 4[(L^{3/2})_+, L].$$

(Это уравнение называется *уравнением Кортевега – де Фриза* и описывает колебание волн на мелководье.)