Пусть f — кососимметричная билинейная форма на линейном пространстве V. Определим ассоциативную *алгебру Вейля* $A(V)$ следующим образом: её пространство образующих есть V, а соотношения имеют вид $vw - wv = f(v,w)\cdot 1$.

1. Пусть (**а**) $\dim V = 1$; (**б**) $\dim V = 2$. Как может быть устроена алгебра $A(V)$?

2. Пусть $V = W \oplus W^*$, причём $f(w_1, w_2) = f(w_1^\wedge, w_2^\wedge) = 0$, $f(w_1, w_2^\wedge) = -f(w_2^\wedge, w_1) = w_2^\wedge(w_1)$. Постройте действие алгебры $A(V)$ на пространстве $S^\bullet(W^*)$ — пространстве многочленов на пространстве W, задающее изоморфизм алгебры $A(V)$ и алгебры дифференциальных операторов.

Пусть q — симметричная билинейная форма на линейном пространстве V. Определим ассоциативную *алгебру Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V)$ следующим образом: её пространство образующих есть V, а соотношения имеют вид $vw + wv = q(v,w)\cdot 1$.

3. Пусть (**а**) $\dim V = 1$; (**б**) $\dim V = 2$. Как можеть быть устроена алгебра $\mathrm{Cl}(V)$? (Разберите случаи основного поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.)

4. (**а**) Докажите, что для конечномерного пространства V алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ конечномерна. (**б**) Выразите $\dim \mathrm{Cl}(V)$ через $\dim V$.

5. Пусть $V = W \oplus W^*$, причём $q(w_1, w_2) = q(w_1^\wedge, w_2^\wedge) = 0$, $q(w_1, w_2^\wedge) = f(w_2^\wedge, w_1) = w_2^\wedge(w_1)$. Постройте действие алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ на пространстве $\Lambda^\bullet(W^*)$, задающее изоморфизм алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ и алгебры $\mathrm{End}(\Lambda^\bullet(W^*))$.

6. Пусть $V = \mathbb{C}^n$. Как может быть устроена алгебра $\mathrm{Cl}(V)$? Тот же вопрос про $\mathbb{R}^n$.