Одна из целей этого листочка — описать центр Z алгебры $U = U(\mathfrak{sl}_2)$, т. е. множество элементов $z \in U$, таких что $zu = uz$ при всех $u \in U$. (Алгебру $\mathfrak{sl}_2$ мы рассматриваем над полем $\mathbb{C}$.)

1. Докажите, что это равносильно тому, что $ez = ze$ и $fz = zf$.
Пусть U_i — стандартная фильтрация на U: $U_0 = \mathbb{C}$, $U_i = U_{i-1} + \mathfrak{sl}_2 U_{i-1}$.

2. Опишите все элементы центра, лежащие в (**а**) U_1; (**б**) U_2.

Пусть $z \in Z$. Рассмотрим i, для которого $z \in U_i$, $z \notin U_{i-1}$. Пусть $[z]_{top}$ — образ z в U_i/U_{i-1} (старший член z).

3. Согласно теореме Пуанкаре – Биркгофа – Витта,

$$U_i/U_{i-1} \simeq S^i(\mathfrak{sl}_2),$$

т. е. z_{top} — некоторый однородный многочлен на пространстве $\mathfrak{sl}_2^*$. Каким уравнениям он удовлетворяет?

4. (**а**) Пусть $A \in \mathfrak{sl}_2$. Докажите, что $\exp A \in SL_2$.

(**б**) Пусть $B \in SL_2$. Докажите, что существует $\ln B \in \mathfrak{sl}_2$.

5. Как описать $[Z]_{top}$ — множество старших членов центра в $\operatorname{gr} U$ — в терминах представления группы SL_2 в пространстве $S^\bullet(\mathfrak{sl}_2)$? (Нужно доказать, что найденные Вами условия являются необходимыми и достаточными.)

6. Опишите алгебры $\operatorname{gr} Z$ и Z.