1. (К вопросу о размерностях однородных компонент свободной алгебры Ли) Пусть $\mathrm{Lie}_k(x_1,\dots,x_n)$ — однородная компонента свободной алгебры Ли от n букв, имеющая градуировку k. Пусть $d_k(n)$ — размерность этого пространства.

(**а**) (Напоминание) Докажите, что

$$\prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{(1-t^k)^{d_k(n)}}=\frac{1}{1-nt}.$$

(**б**) (Формула обращения Мёбиуса) Пусть f и g — две функции натурального аргумента, причём для каждого n верно равенство

$$f(n)=\sum_{d|n}g(d).$$

Тогда для каждого n

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\mu(n/d),$$

где μ — функция Мёбиуса,

$$\mu(n)=\begin{cases}0, \text{ если } n \text{ делится на квадрат некоторого простого числа}\\ (-1)^k, \text{ если } n \text{ — произведение } k \text{ различных простых чисел.}\end{cases}$$

(**в**) Вычислите $d_k(n)$.

(**г**) (Совпадение?) Пусть теперь $d_k(n)$ — количество неприводимых многочленов степени k со старшим коэффициентом 1 над полем из n элементов. Докажите, что утверждение пункта (**а**) верно и в этом случае.

Обозначим через $L(k)$ представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве многочленов от двух переменных степени k.

2. Выпишите матрицы операторов e, f, h в мономиальном базисе $L(k)$.

3. Докажите, что все представления $L(k)$ неприводимы.

4. Докажите, что представление в пространстве $L(k)$ изоморфно представлению в пространстве $S^kL(1)$.

5. Чему равен след оператора $\exp(th)$ на пространстве $L(k)$? Полученная функция от $\exp(t)$ называется *характером* представления.

6. Найдите размерность пространства инвариантов в тензорной степени $L(1)^{\otimes n}$. (Инвариантный вектор в представлении алгебры Ли — это вектор, который аннулируется всеми её элементами [и, значит, сохраняется экспонентами от них].)