В задачах 1–6 речь идёт о представлениях алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

1. Рассмотрим тензорное произведение $L(m) \otimes L(n)$. Как оно раскладывается на неприводимые представления? (Какие представления $L(k)$ в него входят и с какими кратностями?)

2. Докажите, что представления $L(n)$ и $L(n)^*$ изоморфны. (Если V — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то представление в двойственном пространстве определяется формулой $(g\varphi)(v) = -\varphi(gv)$.)

3. Поскольку представление $L(k)$ имеет размерность $k+1$, имеется вложение $\pi\colon \mathfrak{sl}_2 \to \mathfrak{gl}_{k+1}$. (Это вложение вычислялось в предыдущем листочке.) Отсюда следует, что $\mathfrak{gl}_{k+1}$ является представлением $\mathfrak{sl}_2$ (относительно присоединённого действия $[\pi(A), (X)]$). Как это представление раскладывается на неприводимые?

4. Докажите, что представления $S^m L(n)$ и $S^n L(m)$ изоморфны.

5. Из задачи 1 следует, что в $L(n)^{\otimes 2}$ тривиальное представление входит один раз. Докажите, что при нечётных n оно входит в $\Lambda^2 L(n)$, а при чётных n — в $S^2 L(n)$.

6. Как раскладывается на неприводимые представление $S^k L(2)$?

7. Проверьте, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_3$ содержит подалгебру $\mathfrak{gl}_2$ и раскладывается в сумму представлений этой алгебры: $\mathfrak{sl}_3 \simeq V \oplus \mathfrak{gl}_2 \oplus V^*$, где V — тавтологическое (двумерное) представление $\mathfrak{gl}_2$, и коммутатор с $\mathfrak{gl}_2$ — это просто действие на представлениях, коммутаторы $[V,V]$ и $[V^*,V^*]$ равны нулю, а коммутатор $[V,V^*]$ соответствует изоморфизму $V \otimes V^* \simeq \mathrm{End}(V)$. Это аналог выбора базиса e, f, h в алгебре $\mathfrak{sl}_2$.

8. (Продолжение) Постройте представление алгебры $\mathfrak{sl}_3$ в пространстве $S^\bullet(V)$. Какие элементы этого представления аннулируются действием V^*?

9. (Продолжение) Постройте конечномерные представления алгебры $\mathfrak{sl}_3$ по аналогии с $\mathfrak{sl}_2$. (Указание. Сначала постройте представление алгебры $\mathfrak{sl}_3$ в пространстве $L(n) \otimes S^\bullet(V)$.)

В этом листочке намечены два доказательства теоремы о том, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений.

1. Пусть представление V содержит неприводимое подпредставление W, факторпредставление по которому — тривиальное (алгебра действует нулём) представление T. Докажите, что $V \simeq W \oplus T$.

2. Пусть представление V содержит какое-то подпредставление W, факторпредставление T по которому одномерно (а значит, тривиально). Докажите, что $V \simeq W \oplus T$.

3. Пусть представление V содержит какое-то подпредставление W. Рассмотрим представление в $U = \mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$.

(**а**) Выпишите явно действие $\mathfrak{sl}_2$ на U.

(**б**) Докажите, что пространство $U_1 = \{f \in U \mid f|_W = \alpha\,\mathrm{id}_W\}$ — подпредставление в U, а пространство $U_2 = \{f \in U \mid f|_W = 0\}$ — подпредставление коразмерности 1 в U_1.

(**в**) Докажите, что существует $\mathfrak{sl}_2$-гомоморфизм $\varphi\colon V \to W$, тождественный на W.

(**г**) Докажите, что подпредставление W выделяется прямым слагаемым.

4. (**а**) Докажите следующее равенство в универсальной обёртывающей алгебре:

$$\left[\frac{e^m}{m!}, \frac{f^n}{n!}\right] = \sum_{k=1}^{\min(m,n)} \frac{f^{n-k}}{(n-k)!}\binom{h-m-n+2k}{k}\frac{e^{m-k}}{(m-k)!}.$$

(**б**) Пусть V — конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$, V^e — ядро оператора e на этом представлении. Докажите, что оператор h (очевидно, сохраняющий V^e) диагонализируем на V^e.

(**в**) Докажите, что всякое конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2$ раскладывается в прямую сумму неприводимых.