1. Найдите такой дифференциальный оператор D, что (**а**) $e^D = e^{\partial^2} \circ e^x$; (**б**) $e^D = e^{\partial^2} \circ e^{x^2}$.

2. Какой известной Вам алгебре изоморфна алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(p,q)$ для формы сигнатуры (p,q) (p плюсов и q минусов) на $\mathbb{R}^3$ (в зависимости от пары (p,q))? (Определение алгебры Клиффорда см. в условиях семинара 5.)

3. Обозначим $\mathrm{ad}\, a(b) = [a,b]$. Пусть $\mathfrak{g}_{m,n}$ — алгебра Ли с образующими x, y и соотношениями $(\mathrm{ad}\, x)^m(y) = (\mathrm{ad}\, y)^n(x) = 0$. Докажите, что алгебра Ли (**а**) $\mathfrak{g}_{2,2}$; (**б**) $\mathfrak{g}_{2,3}$; (**в**) $\mathfrak{g}_{2,4}$ конечномерна и найдите её размерность. (**г**)* Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}_{3,3}$ бесконечномерна и найдите размерности её однородных компонент степени p по x и q по y.

4. Опишите конечномерные неприводимые представления трёхмерной алгебры Ли с базисом x, y, z и коммутационными соотношениями $[x,y] = z$, $[x,z] = [y,z] = 0$.

5. Как раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений представление (**а**) $S^3L(3)$; (**б**) $S^3L(n)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$?

6. Пусть W — тавтологическое трёхмерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$. Как раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений представление (**а**) $S^kW \otimes W$; (**б**) $S^2W \otimes S^2W$; (**в**)* $S^kW \otimes S^lW$?

7.* Будем рассматривать представления L алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, для которых выполнены следующие условия:

1) Оператор h на пространстве L диагонализируется, причём все его собственные значения вещественны, ограничены сверху и имеют конечную кратность.
2) Представление L конечно порождено.

(**а**) Опишите неприводимые представления такого вида.

(**б**) Опишите все представления L такого вида, у которых существует подпредставление L_1, такое что L_1 и L/L_1 неприводимы.

(**в**) Придумайте неразложимое (в сумму двух) представление L такого вида, для которого есть подпредставления $L_2 \subset L_1 \subset L$, такие что L_2, L_1/L_2 и L/L_1 неприводимы.

(**г**)* Опишите все неразложимые представления такого вида.

Решения задач можно обсудить в среду 24 декабря с 17.30 (не обязательно решать все задачи). Если Вы собираетесь прийти, сообщите об этом Володе Доценко (`dotsenko@mccme.ru`, 2554732). Если Вам неудобно это время, сообщите — что-нибудь придумаем.