ЛЕКЦИЯ 1

Глава I.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathbb{R}^n$

§1. Псевдодифференциальные операторы и их символы

1. Обозначения. Полагаем

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_+, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$\partial_j = \partial/\partial x_j, \quad \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n},$$

$$D_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

Подробности к сказанному в следующих двух пунктах можно найти, например, в лекциях предыдущего семестра.

2. Пространство Шварца быстро убывающих функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из бесконечно гладких комплекснозначных функций $u(x)$ с конечными нормами

$$|\langle u \rangle|_N = \sup(1 + |x|)^{|\alpha|} |\partial^\beta u(x)|, \tag{1}$$

где верхняя грань берется по всем x и всем α, β с $|\alpha| + |\beta| \le N$. Здесь N пробегает все целые неотрицательные числа. Эти нормы определяют топологию в $\mathcal{S}$. В частности, последовательность функций u_k из $\mathcal{S}$ сходится к функции u в этом пространстве, если сходится к ней в каждой из этих норм.

Если $u(x) \in \mathcal{S}$, то $x^\alpha \partial^\beta u(x) \in \mathcal{S}$.

3. Преобразования Фурье. *Прямое преобразование Фурье* определяется например, на функциях из $\mathcal{S}$ формулой

$$v(\xi) = (Fu)(\xi) = F[u(x)] = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx. \tag{2}$$

Здесь и дальше

$$x \cdot \xi = \sum_1^n x_j \xi_j.$$

Как легко проверить, преобразование (2) переводит $D_j u(x)$ в $\xi_j v(\xi)$ и поэтому $D^\alpha u(x)$ в $\xi^\alpha v(\xi)$. Далее, оно переводит $x_j u(x)$ в $-D_j v(\xi)$ (здесь D_j – производная по ξ_j) и поэтому $x^\alpha u(x)$ – в $(-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha v(\xi)$. Это позволяет проверить, что оператор F отображает пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функций от x в пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функций от ξ. Доказывается, что *это непрерывный в обе стороны изоморфизм.* В частности, для любого N найдется такое N', что

$$|\langle Fu \rangle|_N \le C_{N,N'} |\langle u \rangle|_{N'}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

(непрерывность F). Обратным является оператор *обратного преобразования Фурье*

$$u(x) = (F^{-1}v)(x) = F^{-1}[v(\xi)] = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} v(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

4. Представление оператора в частных производных при помощи преобразований Фурье. Рассмотрим линейный оператор в частных производных порядка m

$$a(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{4}$$

с коэффициентами из пространства $\mathcal{B}^\infty$ бесконечно гладких функций $a(x)$, у которых каждая производная $\mathcal{D}^\beta a(x)$ ограничена. Такой оператор действует, конечно, в $\mathcal{S}$, т.е. переводит это пространство в себя, и нетрудно проверить, что он действует непрерывно. Имеем

$$a(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) F^{-1} \xi^\alpha (Fu)(\xi).$$

Положим

$$a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{5}$$

Эта функция называется (*полным*) *символом* оператора (4); более старое ее название – характеристический многочлен. Отметим еще, что функция

$$a_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \tag{6}$$

называется *главным символом* оператора $a(x, D)$. Мы имеем

$$a(x, D)u(x) = F^{-1}_{\xi \to x}[a(x, \xi) F_{y \to \xi} u(y)], \tag{7}$$

или

$$a(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{8}$$

Здесь сначала производится интегрирование по y.

По такой же формуле определяется и псевдодифференциальный оператор, но при этом символ $a(x, \xi)$ уже не обязательно является многочленом по ξ. Однако рассматривать произвольные символы бесполезно, и в следующем пункте мы определяем наиболее употребительные классы символов.

5. Классы символов S^m. Пусть m – *вещественное* число. Класс $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ определим как состоящий из бесконечно гладких комплекснозначных функций $a(x, \xi)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m - |\beta|} \tag{9}$$

при любых α, β. В дальнейшем это будут символы ПДО – псевдодифференциальных операторов. Число m можно назвать порядком символа. (Пока это не очень точное определение порядка.) Порядок не меняется при дифференцировании по x и понижается на единицу при дифференцировании по ξ.

Если m – натуральное число, то рассмотренный выше символ дифференциального оператора, очевидно, принадлежит S^m.

Еще один пример: при любом вещественном m функция $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ принадлежит S^m (проверьте самостоятельно).

Топология в S^m определяется при помощи норм

$$|[a]|_N = \sup(1+|\xi|)^{-m+|\beta|}|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)|, \tag{10}$$

где верхняя грань берется по всем x, ξ и по всем α, β с $|\alpha|+|\beta| \le N$, а N пробегает целые неотрицательные числа.

Удобно положить

$$S^\infty = \bigcap_m S^m, \quad S^{-\infty} = \bigcup_m S^m. \tag{11}$$

Отметим сразу следующие легко проверяемые свойства этих пространств.

1) Из $m_1 < m_2$ следует, что $S^{m_1} \subset S^{m_2}$.

2) При этом S^{m_1} плотно в S^{m_2}, а $S^{-\infty}$ плотно во всех S^m.

3) Если $a(x,\xi) \in S^m$, то $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \in S^{m-|\beta|}$.

4) Если $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$, то $ab \in S^{m_1+m_2}$.

5) Если $a \in S^m$, $b \in S^{-\infty}$, то $ab \in S^{-\infty}$.

6. Классы Ψ^m псевдодифференциальных операторов. ПДО $a(x,D)$ из класса $\Psi^m = \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ – это оператор, определяемый формулой (7) или, что то же, (8), где символ $a(x,\xi)$ принадлежит S^m.

Приведем простейший пример ПДО, не являющегося, вообще говоря, дифференциальным оператором:

$$\Lambda^m = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{m/2} F. \tag{12}$$

Он будет полезен при рассмотрении ПДО в соболевских пространствах (см. лекции предыдущего семестра). Так как оператор Лапласа Δ имеет символ $-|\xi|^2$ (проверьте), то оператор (12) часто записывают так: $(1-\Delta)^{m/2}$. Это, вообще говоря, дробная степень оператора $1-\Delta$.

На следующей лекции будет проверена

Теорема 1. *Псевдодифференциальный оператор из Ψ^m действует непрерывным образом в пространстве Шварца.*

Псевдодифференциальные операторы были введены в 60-х гг. прошлого века. Первоначально потребность в них состояла в том, чтобы облегчить гомотопии при решении проблемы вычисления индекса эллиптического дифференциального оператора на замкнутом многообразии. Что такое эллиптический оператор на замкнутом многообразии (т.е. компактном многообразии без края), пока говорить рано. Наши лекции на самом деле нацелены на построение теории эллиптических ПДО на замкнутом многообразии. Эллиптичность дифференциального оператора (4) в $\mathbb{R}^n$ определяется следующим условием, накладываемым на его главный символ (6):

$$|a(x,\xi)| \ge c|\xi|^m, \tag{13}$$

где c – положительная постоянная. Рано говорить пока и о том, что такое индекс эллиптического оператора на замкнутом многообразии. Задача вычисления индекса эллиптического оператора была поставлена И.М. Гельфандом и привлекла внимание очень многих математиков. Она была решена в топологических терминах, для чего и потребовались гомотопии – непрерывные преобразования эллиптических символов. Построение нужных гомотопий очень сильно облегчается, если вместо многочленов можно рассматривать более общие функции.

Однако с появлением ПДО быстро выяснилось, что они присутствуют всюду в анализе и в особенности в теории уравнений в частных производных. Было построено исчисление ПДО, и оказалось, что оно вобрало в себя технические трудности, которые до этого врозь преодолевались в многочисленных специальных ситуациях в теории уравнений в частных производных.

Псевдодифференциальный оператор может иметь и отрицательный порядок m, и тогда это интегральный оператор, причем охваченными оказываются важнейшие интегральные операторы математической физики.

Мы начинаем с освоения исчисления ПДО. Класс символов выбран простейший, и его хватит для рассмотрения эллиптических ПДО. Обобщения будут указаны позднее.

Положим

$$\Psi^{\infty} = \cup_m \Psi^m, \quad \Psi^{-\infty} = \cap_m \Psi^m. \tag{14}$$

Исчисление ПДО строится “с точностью до прибавления” ПДО из $\Psi^{-\infty}$ (потом уточним, что здесь имеется в виду). Поэтому интересно выяснить, что собой представляют ПДО порядка $-\infty$, т. е. ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Так как символ такого ПДО быстро убывает при $\xi \to \infty$, то в (8) интегралы по y и ξ можно поменять местами. Получается, что ПДО $a(x,D)$ из $\Psi^{-\infty}$ – интегральный оператор

$$a(x,D)u(x) = \int k(x,y)u(y)\,dy, \tag{15}$$

где ядро $k(x,y)$ определяется формулой

$$k(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Обозначим через $K^{-\infty} = K^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ множество всех бесконечно гладких функций $k(x,y)$, удовлетворяющих неравенствам

$$(1+|x-y|)^N |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y)| \le C_{\alpha,\beta,N} \tag{17}$$

при всех α, β и всех целых неотрицательных N. Смысл этих неравенств состоит в том, что все производные функции k быстро убывают при $|x-y| \to \infty$. На следующей лекции будет доказана

Теорема 2. *ПДО $a(x,D)$ принадлежит $\Psi^{-\infty}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде* (15) *с ядром $k(x,y)$, удовлетворяющим неравенствам* (17).

7. Асимптотические разложения символов. Пусть даны символы $a \in S^m$ и $a_j \in S^{m-j}$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Мы скажем, что символ a *разлагается в асимптотический ряд из символов* a_j, и будем писать

$$a \sim a_0 + a_1 + \ldots, \tag{18}$$

если

$$a - \sum_{0}^{N-1} a_j \in S^{m-N} \tag{19}$$

при любом натуральном N.

Например, в случае дифференциального оператора (4) символ $a(x, \xi)$ есть сумма

$$a = a_0 + a_1 + \cdots + a_m,$$

где

$$a_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

и здесь вместо асимптотического ряда мы имеем конечную сумму. Последнее слагаемое не зависит от ξ.

На следующей лекции будет доказана теорема, подготавливающая построение символического исчисления:

Теорема 3. *Пусть дана последовательность символов $a_j \in S^{m-j}$, $j = 0, 1 \ldots$. Тогда существует символ a с асимптотическим разложением* (18). *Разность двух символов с таким асимптотическим разложением принадлежит $S^{-\infty}$.*

Эта теорема принадлежит Хёрмандеру.

Забегая вперед, отметим, что две важнейшие теоремы символического исчисления – это теоремы о композиции двух ПДО и о ПДО, формально сопряженном к данному ПДО. В первой из них утверждается, что произведение двух ПДО – ПДО, и указывается рецепт построения по символам сомножителей асимптотического разложения для символа произведения. Во второй теореме утверждается, что оператор, формально сопряженный к ПДО, – ПДО, и указывается рецепт построения по символу данного ПДО асимптотического разложения символа формально сопряженного ПДО. Смысл слова “формально” будет объяснен.