Лекция 10

Из теоремы о повышении гладкости следует, что *подпространство* Ker*A* *решений однородного эллиптического уравнения* $Au = 0$ *состоит из бесконечно гладких функций*; *в частности, оно не зависит от* s.

Теорема о повышении гладкости справедлива также в локальном варианте, например, таком:

Теорема 6. *Пусть* A – *эллиптический ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$ *и* $u \in H^s(M)$, *так что* $Au \in H^{s-m}(M)$, *но* $Au \in C^\infty$ *в области* G *на* M. *Тогда* $u \in C^\infty(G)$.

Это следует из уже установленного аналогичного результата в $\mathbb{R}^n$.

Как и в $\mathbb{R}^n$, для обобщенной функции u на M определяется ее *сингулярный носитель* $\operatorname{sing\,supp} u$ – наименьшее замкнутое множество, вне которого она является бесконечно гладкой. Для произвольного ПДО A

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{4}$$

Для эллиптического ПДО из теоремы 6 получается, что

$$\operatorname{sing\,supp} Au = \operatorname{sing\,supp} u. \tag{5}$$

Справедлива также теорема, обратная к теореме 5 об априорной оценке:

Теорема 7. *Пусть* A – *ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$, *и пусть для функций* u *из* $H^s(M)$ *с носителями в окрестности* O *точки* x_0 *на* M *справедлива оценка*

$$||u||_{s,M} \le C(||Au||_{s,M} + ||u||_{s-1,M}). \tag{6}$$

Тогда A *эллиптичен в* x_0: *главный символ* $a_0(x_0,\xi)$ *отличен от нуля на ненулевых кокасательных векторах в* x_0.

Действительно, можно предположить, что O – координатная окрестность, и перейти на карту, а в $\mathbb{R}^n$ такая теорема уже доказана.

Прежде чем переходить к основной теореме об эквивалентности эллиптичности и фредгольмовости, рассмотрим важный пример.

3. Оператор Бельтрами–Лапласа на римановом многообразии. Пусть M – риманово многообразие. Это значит, что на нем задана вещественная симметричная положительно определенная матрица $g(y) = (g_{ij}(y))$ в локальных координатах, которая при их изменении ведет себя как тензор типа $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$\widetilde{g}(\widetilde{y}) = \left(\frac{\partial y}{\partial \widetilde{y}}\right)' g(y(\widetilde{y}))\frac{\partial y}{\partial \widetilde{y}}. \tag{7}$$

При помощи этой матрицы вычисляется длина кривой на M: если для простоты кривая лежит в координатной окрестности и задается уравнениями

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

$y = y(t)$ в локальных координатах ($\alpha \leq t \leq \beta$), то длина вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta [\dot y(t)]' g(y(t)) \dot y(t)]^{1/2}\, dt.$$

Далее, эта матрица определяет плотность

$$dx = \{\sqrt{\Theta(y)}\, dy\}, \quad \text{где} \quad \Theta(y) = \det g(y). \tag{8}$$

Если G – область на M, то ее риманов объем выражается интегралом $\int_G dx$.

Например, если M есть n-мерная поверхность в $\mathbb{R}^N$, локально заданная уравнениями

$$x^k = x^k(y^1, \ldots, y^n) \quad (k = 1, \ldots, N) \tag{9}$$

(индексы у координат сейчас пишутся наверху), то

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^i} \frac{\partial x^k(y)}{\partial y^j} \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

В случае двумерной поверхности в $\mathbb{R}^3$ матрица $g(y)$ – это матрица

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Оператор Бельтрами–Лапласа определяется формулой

$$\Delta u(\kappa(y)) = \frac{1}{\sqrt{\Theta(y)}} \sum_{i,j=1}^n \partial_{y^i} \left[\sqrt{\Theta(y)} g^{ij}(y) \partial_{y^j} u(\kappa(y)) \right]. \tag{11}$$

Здесь $(g^{ij}(y))$ – матрица, обратная к матрице $g(y)$, это тензор типа $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Главный символ оператора $-\Delta$ есть

$$\sum g^{ij}(y) \eta_i \eta_j,$$

это положительно определенная квадратичная форма, так что оператор эллиптичен. Кроме того, как нетрудно проверить, он формально самосопряжен.

4. Фредгольмовы операторы.

Определение. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства (можно было бы рассмотреть банаховы пространства) и A – оператор из H_1 в H_2, для простоты ограниченный. Он называется *фредгольмовым*, если выполнены следующие три условия.

1. Ядро KerA конечномерно.
2. Область значений $\operatorname{Im} A$ замкнута в H_2.
3. Она имеет в H_2 конечномерное дополнение $\operatorname{Coker} A$.

Разность
$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A \tag{12}$$
называется *индексом* оператора A.

В литературе встречается также такая терминология: вместо "фредгольмов оператор" пишут "нётеров оператор", а фредгольмовым называют нётеров оператор с нулевым индексом.

Например, пусть $H_1 = H_2 = H$ и $A = I + T$, где I – единичный, а T – компактный операторы. Общеизвестно, что тогда A – фредгольмов оператор и $\varkappa(A) = 0$. Эта теорема доказывается в обязательном курсе функционального анализа или анализа-III. Главный пример – оператор $I + T$ в пространстве $L_2(G)$, где G – какая-нибудь область в $\mathbb{R}^n$ и T – интегральный оператор $\int_G K(x,y)u(y)\,dy$ с квадратично интегрируемым ядром.

Пусть A – ограниченный оператор из H_1 в H_2. Ограниченный оператор B из H_2 в H_1 назывется *левым параметриксом* для A, если
$$B_1 A = I_1 + T_1, \tag{13}$$
и *правым параметриксом*, если
$$AB_2 = I_2 + T_2. \tag{14}$$
Здесь и дальше I_j и T_j – единичный и компактный операторы в H_j, $j = 1, 2$. Если оператор B является левым и правым параметриксом, то он называется (двусторонним) параметриксом для A. Эти термины мы сравним с введенными раньше аналогичными терминами для ПДО в следующем пункте.

Если оператор A имеет левый и правый параметриксы B_1 и B_2, то оба они являются двусторонними параметриксами. Действительно, тогда
$$B_1 A B_2 = (I_1 + T_1)B_2 = B_1(I_2 + T_2),$$
и разность $B_1 - B_2$ оказывается компактным оператором, так как произведение ограниченного оператора на компактный компактно. Отсюда легко следует наше утверждение.

Предложение 1. 1.*Пусть оператор A имеет левый параметрикс. Тогда он имеет конечномерное ядро и замкнутую область значений.* 2. *Пусть оператор A имеет правый параметрикс. Тогда он имеет замкнутую область значений.* 3. *Пусть оператор A фредгольмов. Тогда он имеет двусторонний параметрикс.*

Доказательство предложения 1. Пусть B_1 – левый параметрикс, так что можно пользоваться соотношением (13). Тогда
$$\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker}(I_1 + T_1),$$
отсюда сразу следует, что $\operatorname{Ker} A$ конечномерно. Докажем теперь следующее вспомогательное предложение:

Предложение 2. *При наличии левого параметрикса на ортогональном дополнении* $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ *к ядру оператора* A *справедлива оценка*

$$\|u\|_1 \le C\|Au\|_2 \tag{15}$$

с не зависящей от u *постоянной.*

Доказательство предложения 2. Допустим, что оценка (15) неверна. Тогда существует такая последовательность элементов $u_n \perp \mathrm{KerA}$, что $\|u_n\|_1 = 1$ и $Au_n \to 0$. Из (13) следует, что $u_n + T_1 u_n \to 0$. Так как оператор T_1 компактен, а $\{u_n\}$ – ограниченная последовательность, то есть такая подпоследовательность индексов $\{n_k\}$, что последовательность $\{Tu_{n_k}\}$ фундаментальна. Пусть для простоты обозначений $\{Tu_n\}$ фундаментальна. Тогда и $\{u_n\}$ фундаментальна. Так как H_1 полно, то $\{u_n\}$ имеет предел u. Этот предел имеет единичную норму и ортогонален $\operatorname{Ker} A$. В то же время $Au = 0$. Это противоречие доказывает оценку (15).

Теперь проверим замкнутость области значений. Пусть $Au_n \to f$. Вычитая из u_n ортогональную проекцию на KerA, можно предположить, что $u_n \perp \mathrm{KerA}$. Используя оценку (15) с $u_n - u_m$ вместо u, получаем, что $\{u_n\}$ фундаментальна. Пусть $u_n \to u$. Тогда $Au_n \to Au$. Значит, $g = Au$. $\Box$

Из утверждения 2 проверим конечномерность коядра. Она видна из (14):

$$\operatorname{Im} A \supset \operatorname{Im}(I_2 + T_2).$$

Правая часть имеет конечномерное дополнение, значит, и левая.

Наметим план доказательства утверждения 3. Фредгольмов оператор A взаимно однозначно отображает $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$ на ImA и в силу непрерывности имеет обратный (по теореме об обратном операторе), обозначим его B_0. Продолжим B_0 до оператора B, положив его равным нулевому оператору на $(\operatorname{Im} A)^{\perp}$. Учитывая компактность конечномерного оператора, можно показать, что B – параметрикс.

На самом деле справедливы утверждения, обратные к утверждениям 1 и 2.

5. Эквивалентность эллиптичности и фредгольмовости. Следующая теорема является основной в настоящем параграфе.

Теорема 8. *Пусть* A *– ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1°. *Оператор* A *эллиптичен.*

2°. *Оператор* A *имеет двусторонний параметрикс* $B \in \Psi^m_{ph}(M)$ *в смысле теории ПДО.*

3°. A *– фредгольмов оператор из* $H^s(M)$ *в* $H^{s-m}(M)$ *при любом* s.

4°. *При любом* s *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{s,M} \le C_s\big[\|Au\|_{s-m,M} + \|u\|_{s-1,M}\big]. \tag{16}$$

Более того, условие 3° при некотором s *равносильно этому условию при всех* s, *и то же верно для условия 4°.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $1^\circ \Rightarrow 2$, $1^\circ \Rightarrow 4^\circ$ при всех s и $1^\circ \Leftarrow 4^\circ$ при каком-нибудь s.

Теперь заметим, что ПДО порядка $-\infty$ является компактным оператором из H^{s_1} в H^{s_2} при любых s_1 и s_2. Поэтому $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ при всех s.

Предположим, что выполнено условие 3° при некотором s. Тогда оператор A взаимно однозначно отображает $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ на $\operatorname{Im} A$ и по теореме об обратном операторе имеет непрерывный обратный. Поэтому на $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{s,M} \le C\|Au\|_{s-m,M}. \tag{17}$$

Пусть $\{u_j\}_1^N$ – базис в $\operatorname{Ker} A$, ортонормированный в смысле скалярного произведения в $H^s(M)$. Тогда любая функция из $H^s(M)$ представима в виде

$$u = \widetilde{u} + \sum (u, u_j)_{s,M} u_j,$$

где $\widetilde{u} \in (\operatorname{Ker} A)^\perp$. Поэтому

$$\|u\|_{s,M} \le C[\|A\widetilde{u}\|_{s-m,M} + \sum |(u,u_j)_{s,M}| \|u_j\|_{s,M}] \le C'[\|Au\|_{s-m,M} + \sum |(u,u_j)_{s,M}|].$$

Заметим, что

$$|(u,v)_{s,M}| \le C''\|u\|_{s-1,M}\|v\|_{s+1,M}, \tag{18}$$

этот вариант обобщенного неравенства Шварца поясним немного ниже. Поэтому получаем (16). Из (16), как мы уже знаем, следует эллиптичность оператора A.

Осталось проверить неравенство (18). При его проверке можно заменить u и v функциями φu и ψv, где φ и ψ – бесконечно гладкие функции с носителями в некоторой координатной окрестности. Считая локальные координаты согласованными с заданной плотностью, можем перейти на карту. В $\mathbb{R}^n$ нужное неравенство проверяется элементарно, например, при помощи преобразования Фурье. ☐

Дополнительные замечания. 1. *Если* $\operatorname{Ker} A = 0$, *то априорная оценка верна в форме* (17).

Это следует, например, из предложения 2.

2. *Пусть эллиптический ПДО* $A \in \Psi^m_{ph}(M)$ *имеет обратный* A^{-1} *при всех* s. *Тогда* A^{-1} – *эллиптический ПДО из* $\Psi^{-m}_{ph}(M)$.

Действительно, если B – параметрикс, то

$$BAA^{-1} = (I + T_1)A^{-1} = B,$$

откуда видно, что $A^{-1} - B$ – оператор порядка $-\infty$.

3. Ядро эллиптического оператора состоит из бесконечно гладких функций и не зависит от s. Но еще предстоит показать, что индекс не зависит от s и что обратимость эллиптического оператора при каком-нибудь s влечет обратимость при всех s.

6. Сопряженный оператор. Пусть A – ПДО из $\Psi^m(M)$, и пусть сначала $m \leq 0$. Тогда A и $A^{(*)}$ – ограниченные операторы в $L_2(M)$ и равенство

$$(Au, v)_{0,M} = (u, A^{(*)}v)_{0,M}. \tag{19}$$

верно для функций u, v из $H^m(M)$. Оно означает, что *оператор $A^{(*)}$ сопряжен к A в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве.* В дальнейшем будем записывать его в виде A^*, без скобок в показателе.

Пусть теперь $m > 0$. Тогда A – неограниченный оператор в $L_2(M)$. Его областью определения $D(A)$ является пространство $H^m(M)$. Если A замкнут, то ввиду плотности в $L_2(M)$ его области определения он имеет сопряженный A^* в смысле теории операторов в гильбертовом пространстве.

Теорема 9. *Пусть оператор $A \in H^m_{ph}(M)$, $m > 0$, эллиптичен. Тогда это замкнутый оператор в $L_2(M)$. Сопряженный оператор A^* совпадает с формально сопряженным $A^{(*)}$ и имеет ту же область определения $H^m(M)$.*

Доказательство. Проверим замкнутость. Пусть $u_l \in H^m(M)$, $u_l \to u$ в $H^0(M)$ и $Au_l \to f$ в $H^0(M)$. Тогда $Au_n \to Au$ в $H^{-m}(M)$, так что $Au = f$ в $H^{-m}(M)$. Но так как $f \in H^0(M)$, то по теореме о повышении гладкости $u \in H^m(M)$. Таким образом, $u \in D(A)$ и $Au = f$. Это и означает, что оператор A замкнут.

Мы имеем $v \in D(A^*)$ и $A^*v = g$, если

$$(Au, v)_{0,M} = (u, g)_{0,M} \text{ для } u \in H^m(M). \tag{20}$$

Временно обозначим оператор $A^{(*)}$ через B. Имеем

$$(Au, v)_{0,M} = (u, Bv)_{0,M} \text{ для } u, v \in H^m(M). \tag{21}$$

Это проверяется аппроксимацией функций u и v бесконечно гладкими функциями.

Из сравнения (20) и (21) видно, что $D(B) = H^m(M) \subset D(A^*)$ и $A^* = B$ на $D(B)$.

С другой стороны, если $v \in D(A^*)$ и $A^*v = g$ в $H^0(M)$, то $Bv = g$ в $H^{-m}(M)$. Но $g \in H^0(M)$ и B эллиптичен, так что в силу теоремы о повышении гладкости $v \in H^m(M)$. Таким образом, установлено обратное включение $D(A^*) \subset D(B)$ и совпадение этих двух операторов. □

Скобки в показателе мы теперь будем опускать и будем писать (для эллиптических A) A^* вместо $A^{(*)}$.