Лекция 11

7. Простейшие спектральные свойства ПДО. В этом пункте мы будем рассматривать псевдодифференциальный оператор как оператор в $L_2(M)$.

Согласно известным определениям, *резольвентное множество* $\rho(A)$ оператора A в гильбертовом пространстве H – это множество таких точек λ на комплексной плоскости, что оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1},$$

называемый *резольвентой* оператора A в точке λ. Это открытое множество; дополнение $\sigma(A)$ к нему замкнуто и называется *спектром* оператора A. В интересующем нас сейчас случае $H = H^0(M)$.

Если ПДО A из $\Psi^m(M)$ имеет отрицательный порядок m, то он компактен в $H^0(M)$, так как действует ограниченным образом из $H^0(M)$ в $H^{-m}(M)$, а $H^{-m}(M)$ вложено в $H^0(M)$ компактно. Спектр такого оператора состоит из нуля и изолированных ненулевых собственных значений, каждому ненулевому собственному значению отвечает конечномерное *корневое подпространство*, состоящее из соответствующих этому собственному значению собственных и присоединенных векторов и нуля. Собственные значения могут скапливаться только к нулю. Точка 0 может быть или не быть собственным значением, но оператор A не фредгольмов в $H^0(M)$ (хотя фредгольмов как оператор из $H^0(M)$ в $H^{-m}(M)$): его область значений незамкнута в $H^0(M)$. Точки λ, такие, что оператор $A - \lambda I$ в гильбертовом пространстве H не является фредгольмовым, называются точками *существенного спектра* оператора A. Таким образом, 0 – точка существенного спектра ПДО отрицательного порядка.

При $m = 0$ полиоднородный ПДО имеет существенный спектр, состоящий из значений λ главного символа $a_0(x, \xi)$. Действительно, главный символ ПДО $A - \lambda I$ равен $a_0(x, \xi) - \lambda$, и при таких λ этот оператор не эллиптичен, значит, не фредгольмов в $H^0(M)$.

При $m > 0$ эллиптический ПДО A может иметь непустое резольвентное множество. Если это так и λ принадлежит ему, то резольвента $R_A(\lambda)$ компактна в $H^0(M)$, так что A – *оператор с компактной резольвентой*. Спектр такого оператора, как известно, состоит из изолированных собственных значений, которые могут скапливаться только к бесконечности. Каждому собственному значению отвечает конечномерное корневое подпространство. Про операторы с такими свойствами говорят, что они имеют *дискретный спектр*.

Если $A = A^*$, то оператор A называется *самосопряженным*. Спектр такого оператора лежит на вещественной оси, присоединенных векторов нет. Если A – самосопряженный компактный оператор в H, то он имеет ортонормированный базис из собственных векторов. Аналогично обстоит дело в случае самосопряженного оператора с компактной резольвентой.

Из сказанного следует, что самосопряженный ПДО отрицательного порядка имеет ортонормированный базис из собственных функций в $H^0(M)$. Если A эллиптичен, то, используя теорему о повышении гладкости, легко проверить, что собственные функции принадлежат $C^\infty(M)$. Если A – эллиптический ПДО

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX положительного порядка, то автоматически это оператор с компактной резольвентой и ортонормированным базисом из собственных функций. И снова легко проверяется, что они принадлежат $C^\infty(M)$.

Примером самосопряженного эллиптического оператора (порядка 2) является оператор Бельтрами–Лапласа на римановом многообразии.

Если ПДО A ненулевого порядка эллиптичен, но не является самосопряженным оператором, то его собственные и присоединенные функции принадлежат $C^\infty(M)$. Это следует из того, что они принадлежат ядрам эллиптических операторов $(A-\lambda I)^k$ с натуральными k.

Но здесь при нецелом m приходится несколько расширить класс рассматриваемых ПДО и допустить, что в асимптотическом разложении символа порядки слагаемых не обязательно отличаются от m на целое число. Подробно на этом останавливаться не будем.

8. Самосопряженный обратимый эллиптический ПДО.

Теорема 10. *Пусть t -любое вещественное число и $a_0(x,\xi)$ – бесконечно гладкая функция на $T^*M\setminus 0$, положительно однородная степени t. Тогда существует ПДО A из $\Psi^t_{ph}(M)$ с главным символом a_0, эллиптический, если этот символ удоовлетворяет условию эллиптичности. Если он положителен на ненулевых кокасательных векторах, то оператор A можно взять самосопряженным и взаимно однозначно и непрерывно отображающим $H^t(M)$ на $H^0(M)$.*

Доказательство. Зафиксируем конечное покрытие $\{O_k\}_1^K$ многообразия M координатными окрестностями и подчиненное ему разбиение единицы $\sum\varphi_k=1$, состоящее из бесконечно гладких функций. Пусть ψ_k – бесконечно гладкие функции с носителями в O_k, равные 1 в окрестностях носителей функций φ_k. Перенося функцию $a_0(x,\xi)$ на соответствующие карты, строим там ПДО $A^{(k)}$ в локальных координатах с этим главным символом. Полагаем

$$A_0=\sum\varphi_k A^{(k)}\psi_k\cdot .$$

Это ПДО на M с главным символом a_0, эллиптический, если этот символ удовлетворяет условию эллиптичности. Теперь предположим, что этот символ положителен. Полагаем

$$A_1=\operatorname{Re}A_0=\tfrac{1}{2}(A_0+A_0^*).$$

Это эллиптический ПДО с тем же главным символом, являющийся самосопряженным оператором в $H^0(M)$. В этом пространстве он имеет ортонормированный базис из бесконечно гладких собственных функций, причем только конечное число собственных значений может быть отличным от нуля. Заменяя их ненулевыми вещественными числами, мы изменим наш оператор на бесконечно сглаживающее слагаемое и сохраним самосопряженность. Теперь наш оператор и сопряженный к нему не имеют ядра. Из приведенной ниже формулы (23) (для любого оператора в гильбертововм пространстве с плотной областью определения) ввиду замкнутости области значений следует, что она совпадает с $H^0(M)$. Таким образом, наш оператор обратим и осуществляет требуемый изоморфизм. □

В будущем мы покажем, что такие изоморфизмы можно установить при помощи степеней одного эллиптического ПДО порядка 1.

Теорема 11. *Скалярное произведение* $(u,v)_{0,M}$ *в* $H^0(M)$ *продолжается до непрерывной формы на* $H^s(M)\times H^{-s}(M)$ *и удовлетворяет обобщенному неравенству Шварца*

$$|(u,v)_{0,M}|\le C_s\|u\|_{s,M}\|v\|_{-s,M}. \tag{22}$$

Эта форма при $v\in H^{-s}(M)$ *дает общий вид линейного непрерывного функционала над* $H^s(M)$.

Доказательство. Продолжимость формы и неравенство (22) выводятся из аналогичных результатов в $\mathbb{R}^n$. Для этого используем достаточно мелкое разбиение единицы $\sum\varphi_k=1$, подчиненное покрытию многообразия координатными окрестностями O_k (если $\operatorname{supp}\varphi_k$ и $\operatorname{supp}\varphi_l$ пересекаются, то их объединение считаем лежащим в пересечении окрестностей O_k и $\vee_l$). Из (22) следует, что элементы v из $H^{-s}(M)$ определяют линейные непрерывные функционалы $(u,v)_{0,M}$ над $H^s(M)$. Что это общий вид линейного непрерывного функционала над $H^s(M)$, проверяется сведением общего случая к случаю $s=0$, в котором используется теорема Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Ср. лекции предыдущего семестра. □

9. Роль ядра ПДО A^*. В элементарной теории линейных операторов доказывается, что если A – оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения, то сопряженный оператор A^* существует, его ядро $\operatorname{Ker}A^*$ замкнуто и

$$H=\overline{\operatorname{Im}A}\oplus\operatorname{Ker}A^*. \tag{23}$$

Теорема 12. *Пусть* A *– эллиптический ПДО из* $\Psi^m_{ph}(M)$. *Рассмотрим его как оператор из* $H^s(M)$ *в* $H^{s-m}(M)$. *Справедлива формула*

$$H^{s-m}(M)=\operatorname{Im}A\oplus\operatorname{Ker}A^*, \tag{24}$$

где ортогональность имеет место относительно формы $(u,v)_{0,M}$, *продолженной на* $H^{s-m}(M)\times H^{m-s}(M)$.

Поясним, что здесь $\operatorname{Im}A$ замкнута в $H^{s-m}(M)$, а $\operatorname{Ker}A^*$ конечномерно и не зависит от s, так как A^* эллиптичен вместе с A. Существенно, что мы можем рассматривать A^* во всей соболевской шкале, обычного понятия сопряженного оператора в гильбертовом пространстве тут недостаточно.

Доказательство теоремы 11. Если $m\ge 0$ и $s=m$, то формула (24) непосредственно следует из формулы (23). (В п. 8 мы это фактически уже отметили в частном случае.)

Этот результат означает, что в случае $m \geq 0$ уравнение $Au = f$ с $f \in H^0(M)$ имеет решение $u \in H^m(M)$ тогда и только тогда, когда $A^* f = 0$. Сейчас мы обобщим этот результат на произвольные m и s.

Оператор из теоремы 9 обозначим через Λ_t. Уравнение $Au = f$ эквивалентно уравнению

$$Bv = g, \text{ где } B = \Lambda_{s-m} A \Lambda_s^{-1}, \quad v = \Lambda_s u, \quad g = \Lambda_{s-m} f.$$

Здесь B – эллиптический ПДО порядка 0 и $v, g \in H^0(M)$. Для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$(g, w)_{0,M} = 0 \text{ при } B^* w = 0,$$

т.е. (полагаем $h = \Lambda_{s-m} w$)

$$(\Lambda_{s-m} f, w)_{0,M} = 0 \text{ при } \Lambda_s^{-1} A^* \Lambda_{s-m} w = 0,$$

т.е.

$$(f, h)_{0,M} = 0 \text{ при } A^* h = 0.$$

Именно эти условия и надо было получить. □

Следствие. *Индекс эллиптического ПДО A выражается формулой*

$$\varkappa(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Ker} A^* . \tag{25}$$

Он не зависит от s.

10. Дальнейшие свойства индекса. Пусть H_1, H_2, H_3 – гильбертовы пространства.

Предложение 3. *Пусть $A_1 : H_1 \mapsto H_2$, $A_2 : H_2 \mapsto H_3$ – фредгольмовы операторы. Тогда $A_2 A_1 : H_1 \mapsto H_3$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A_2 A_1) = \varkappa(A_2) + \varkappa(A_1). \tag{26}$$

Это утверждение доказывается во многих книгах. Возможно, мы докажем его в начале следуюшего семестра.

Предложение 4. *Пусть $A : H_1 \mapsto H_2$ – фредгольмов оператор и $B : H^2 \mapsto H^1$ –параметрикс для A. Тогда B – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(B) = -\varkappa(A). \tag{27}$$

Первое утверждение доказывать не будем, для эллиптических A оно очевидно. Формула (27) следует из (26), так как произведение BA имеет нулевой индекс.

Предложение 5. *Пусть A – фредгольмов и T – компактный операторы из H_1 в H_2. Тогда $A + T$ – фредгольмов оператор из H_1 в H_2 и*

$$\varkappa(A + T) = \varkappa(A). \tag{28}$$

Это следует из того, что параметрикс B для A остается параметриксом для $A+T$.

Предложение 6. *Пусть A – (ограниченный) фредгольмов оператор из H_1 в H_2. Тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что если ΔA – оператор из H_1 в H_2 с нормой $\|\Delta A\| < \varepsilon$, то $A + \Delta A$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A + \Delta A) = \varkappa(A). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть B – параметрикс для A. Тогда

$$B(A + \Delta A) = BA + B\Delta A = I_1 + T_1 + B\Delta A.$$

Пусть

$$\|B\|\|\Delta A\| < 1.$$

Тогда существует $(I_1 + B\Delta A)^{-1}$ и

$$(I_1 + B\Delta A)^{-1}B(A + \Delta A) = I_1 + (I + B\Delta A)^{-1}T_1.$$

Последнее слагаемое компактно, так что $(I_1 + B\Delta A)^{-1}B$ – левый параметрикс для $A + \Delta A$. Правый строится аналогично, так что можно взять $\varepsilon = \|B\|^{-1}$. Любой обратимый оператор имеет нулевой индекс, так что в силу предложения 3 индекс построенного параметрикса такой же, как у B. Отсюда и из предложения 4 следует (29).

Предложение 7. *Пусть A – фредгольмов оператор из H_1 в H_2 с нулевым индексом. Тогда существует такой конечномерный оператор T, что $A + T$ обратим.*

Доказательство. Пусть $u_1, \ldots, u_m$ – ортонормированный базис в $\operatorname{Ker} A$ и $v_1, \ldots, v_n$ – ортонормированный базис в $\operatorname{Ker} A^*$. Положим $Tu_j = v_j$ ($j = 1, \ldots, m$), $T = 0$ на $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ и распространим T на H_1 по линейности. Это конечномерный оператор, так что он компактен и $A + T$ сохраняет нулевой индекс. Теперь достаточно проверить, что $A + T$ имеет тривиальное ядро.

Пусть h – элемент этого ядра. Пусть $h = h_1 + h_2$, где $h_1 \in \mathrm{KerA}$ и $h_2 \perp \operatorname{Ker} A$. Тогда

$$(A+T)h_1 = Th_1, \quad (A+T)h_2 = Ah_2, \quad Th_1 \perp Ah_2,$$

так что $Th_1 = 0$ и $Ah_2 = 0$. Отсюда следует, что $h_1 = 0$, а также что $Ah_2 = 0$ и $h_2 = 0$ (см. предложение 2). $\square$