ЛЕКЦИЯ 2

8. Доказательство теоремы 1. Запишем ПДО $A = a(x, D) \in S^m$ в виде

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) v(\xi)\, d\xi, \quad \text{где} \quad v(\xi) = Fu.$$

Функция v принадлежит $\mathcal{S}$, поэтому быстро убывает, так что можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Получаем

$$D^\alpha Au(x) = \int e^{ix\cdot\xi} b_\alpha(x,\xi) v(\xi)\, d\xi,$$

и легко проверить, что $b_\alpha \in S^{m+|\alpha|}$. Ясно, что этот интеграл – ограниченная функция. Далее,

$$x^\beta D^\alpha Au(x) = \int [D_\xi^\beta e^{ix\cdot\xi}] b_\alpha(x,\xi) v(\xi)\, d\xi.$$

Здесь свойства подинтегральных функций позволяют проинтегрировать по частям, и мы получаем

$$x^\beta D^\alpha Au(x) = (-1)^{|\beta|} \int e^{ix\cdot\xi} D_\xi^\beta [b_\alpha(x,\xi) v(\xi)]\, d\xi.$$

Снова видно, что интеграл ограничен. Более того, для любого N мы можем найти такое N', что

$$|\langle Au\rangle|_N \le C_{N,N'} |\langle v\rangle|_{N'}.$$

А так как преобразование Фурье непрерывно отображает $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$, то для любого N найдется такое N'', что

$$|\langle Au\rangle|_N \le C'_{N,N''} |\langle u\rangle|_{N''}. \quad \square \tag{1}$$

9. Доказательство теоремы 2. Пусть $a \in S^{-\infty}$. Запишем формулу для ядра:

$$k(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Так как символ со всеми его производными быстро убывает при $\xi \to \infty$, то можно дифференцировать под знаком интеграла. Получаем

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a_{\alpha,\beta}(x,\xi)\, d\xi,$$

и легко видеть, что $a_{\alpha,\beta}(x,\xi) \in S^{-\infty}$. Далее,

$$(x-y)^\gamma \partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int D_\xi^\gamma [e^{i(x-y)\cdot\xi}] a_{\alpha,\beta}(x,\xi)\, d\xi.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Здесь быстрое убывание функции $a_{\alpha,\beta}(x,\xi)$ и ее производных позволяет проинтегрировать по частям и получить

$$(x-y)^\gamma \partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x,y) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\xi)\, d\xi.$$

Символ $a_{\alpha,\beta,\gamma}(x,\xi)$ снова принадлежит $S^{-\infty}$, так что интеграл ограничен. Таким образом, $k \in K^{-\infty}$.

Обратно, пусть $k(x,y) \in K^{-\infty}$. Подставим в интеграл

$$Au(x) = \int k(x,y)u(y)\, dy$$

выражение для $u(x)$ через обратное преобразование этой функции и поменяем местами интегралы (очевидно, что это можно сделать). Получим

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi) v(\xi)\, d\xi,$$

где

$$a(x,\xi) = \int e^{-i(x-y)\cdot\xi} k(x,y)\, dy = e^{-ix\cdot\xi} \int e^{iy\cdot\xi} k(x,y)\, dy. \tag{3}$$

Отсюда

$$\xi^\alpha a(x,\xi) = e^{-ix\cdot\xi} \int [D_y^\alpha e^{iy\cdot\xi}] k(x,y)\, dy,$$

и здесь справа производные переносятся на k интегрированием по частям. Получается ограниченный интеграл. Мы видим, что $a(x,\xi)$ быстро убывает при $\xi \to \infty$ равномерно по x. Проверьте самостоятельно, что то же верно для производных от a. (Например, при дифференцировании функции $a(x,\xi)$ по ξ_j происходит умножение ядра на $x_j - y_j$ с точностью до постоянного множителя.) $\square$

Замечание. Возможно другое написание ядра, и оно будет использоваться при рассмотрении ПДО конечного отрицательного порядка:

$$(2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi = \int K(x, x-y) u(y)\, dy,$$

где

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy\cdot\xi} a(x,\xi) d\xi. \tag{4}$$

При такой записи ядро – обратное преобразование Фурье от символа по второму переменному, а символ – соответственно прямое преобразование Фурье от ядра по второму переменному:

$$a(x,\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} K(x,y)\, dy. \tag{5}$$

Пока мы не останавливаемся на выяснении того, в каком смысле и при каких условиях эти формулы корректны.

10. Доказательство теоремы 3. В этом доказательстве интересна прежде всего формула, по которой строится $a(x, \xi)$. Но доказательство достаточно деликатное.

Пусть $\theta(\xi)$ – функция из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная 0 при $|\xi| \leq 1$ и 1 при $|\xi| \geq 2$, и пусть $\{\tau_j\}_0^\infty$ – возрастающая последовательность чисел, в которой первое число не меньше 1; она строится дальше. Положим

$$a(x, \xi) = \sum_0^\infty \theta(\xi/\tau_j) a_j(x, \xi). \tag{6}$$

При фиксированном (x, ξ) только конечное число членов этого ряда отлично от нуля, поэтому вопрос о сходимости не возникает.

Очевидно, что $\partial^\beta \theta(\xi)$ и $|\xi|^\beta \partial^\beta \theta(\xi)$ – ограниченные функции, поэтому

$$|\partial_\xi^\beta \theta(\xi/\tau)| \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{-|\beta|} \quad (\tau \geq 1, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует, что

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau) a_j(x, \xi)]| \leq C_{\alpha,\beta,j} (1 + |\xi|)^{m - |\beta| - j} \tag{7}$$

при $\tau \geq 1$ и всех x, ξ.

Очевидно, что при фиксированных α, β, j и достаточно большом τ

$$C_{\alpha,\beta,j} \leq 2^{-j}(1 + |\xi|) \ \text{ для } \ |\xi| > \tau/2. \tag{8}$$

Мы выберем $\tau_j > \tau_{j-1}$ так, чтобы

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau_j) a_j(x, \xi)]| \leq 2^{-j} (1 + |\xi|)^{1 + m - |\beta| - j} \tag{9}$$

что возможно в силу (7) и (8). Грубо говоря, по сравнению с (7) мы справа увеличили степень множителя $1 + |\xi|$ на 1, но зато числовой множитель заменили на 2^{-j}.

Теперь функция $a(x, \xi)$ полностью определена. Зафиксируем α, β, N и положим $N' = \max(|\alpha| + |\beta|, N + 1)$. Нам надо оценить

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x, \xi) - \sum_0^N a_j(x, \xi) \right] = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 . \tag{10}$$

Здесь

$$\sum_1 = \sum_0^N \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \{[\theta(\xi/\tau_j) - 1] a_j(x, \xi)\} \in S^{-\infty}, \tag{11}$$

так как эта функция равна нулю при больших ξ. Далее,

$$\sum_2 = \sum_{N+1}^{N'} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau_j) a_j(x,\xi)]$$

и

$$|\sum_2| \le C(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)} \tag{12}$$

в силу (7). Наконец,

$$\sum_3 = \sum_{N'+1}^{\infty} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta [\theta(\xi/\tau_j) a_j(x,\xi)]$$

удовлетворяет неравенству (здесь мы суммируем правые части в (9))

$$|\sum_3| \le C'(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)}. \tag{13}$$

Мы видим, что модуль левой части в (10) не превосходит

$$C''(1+|\xi|)^{m-|\beta|-(N+1)},$$

что и требовалось показать.

Осталось заметить, что если функции a и $\widetilde{a}$ имеют одно и то же асимптотическое разложение $a_0 + \dots + a_N + \dots$, то

$$a - \widetilde{a} = \{a - [a_0 + \dots + a_N]\} - \{\widetilde{a} - [a_0 + \dots + a_N]\} \in S^{m-N-1}$$

при любом N. $\square$

11. Проверка асимптотичности разложения. Следующая теорема облегчает эту проверку.

Теорема 4. *Предположим, что*

$$a(x,\xi) \in C^\infty, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\mu_{\alpha,\beta}}, \tag{14}$$

$$a_j(x,\xi) \in S^{m-j} \quad (j = 0, 1, \dots), \tag{15}$$

$$\left| a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{l-1} a_j(x,\xi) \right| \le C_l(1+|\xi|)^{r_l}, \quad r_l \to -\infty. \tag{16}$$

Тогда $a \in S^m$ *и* $a \sim a_0 + a_1 + \dots$.

В частности, условие (14) выполнено, если $a \in S^\infty$, а условие (16) достаточно считать выполненным с $r_l = m - l$ (без каких-либо дифференцирований).

Доказательство будет обсуждаться на следующей лекции.