ЛЕКЦИЯ 3

Доказательство теоремы 4. Нужно проверить неравенства

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\xi)\right]\right| \le C_{\alpha,\beta,N}(1+|\xi|)^{m-N-|\beta|-1}, \tag{17}$$

и это делается индуктивно по $|\alpha|+|\beta|$. Но мы ограничимся первыми двумя шагами.

1) $|\alpha|=|\beta|=0$. Берем $l>N$ с $r_l<m-N-1$ и используем (15), (16).

2) $|\alpha|+|\beta|=1$. Нам понадобится следующая известная лемма.

Лемма. *Пусть* $f\in\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$ *и* $M_j=\sup|f^{(j)}(t)|$, $j=0,1,2$. *Тогда*

$$M_1^2 \le 4M_0M_2. \tag{18}$$

Ее доказательство пока отложим. Закончим рассмотрение случая 2).

Положим $\mu=\max_{|\alpha|+|\beta|\le 2}\mu_{\alpha,\beta}$ и предположим, не теряя общности, что $\mu>m$.

Используя (14), (15), результат 1) и лемму, получим для $|\alpha|+|\beta|=1$, $N'\ge N$

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N'} a_j(x,\xi)\right]\right|^2 \le 4(1+|\xi|)^{m-N'-1}(1+|\xi|)^{\mu},$$

и здесь

$$\frac{m-N'-1+\mu}{2} \le m-N-1-|\beta|$$

при достаточно большом $N'>N$. Остается использовать (15) для $j>N$. $\square$

Доказательство леммы. Воспользуемся формулой Тейлора

$$f(t+\tau)=f(t)+\tau f'(t)+\frac{\tau^2}{2}f''(t+\theta\tau), \quad \theta\in(0,1).$$

Выражая отсюда первую производную, получаем

$$M_1 \le \frac{2M_0}{\tau}+\frac{\tau M_2}{2}. \tag{19}$$

Правая часть достигает минимума при $2M_0/\tau^2=M_2/2$. Соответствующее τ равно $2\sqrt{M_0/M_2}$. Подставляя его в (19), получаем

$$M_1 \le 2\sqrt{M_0M_2}. \quad \square$$

§2. Исчисление ПДО в $\mathbb{R}^n$

1. Анализ оператора более общего вида. Рассмотрим оператор вида

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{1}$$

Здесь вместо символа $a(x,\xi)$ стоит функция $p(x,y,\xi)$, называемая *амплитудой*, от трех групп переменных, причем x, y, ξ имеют одинаковую размерность n. Функция u по-прежнему берется из пространства Шварца.

Заметим, что мы могли определить пространство $S(\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})$, не предполагая, что $n_1 = n_2$. Сейчас мы предположим, что

$$p(x,y,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Это пространство состоит из бесконечно гладких функций p, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \partial_\xi^\gamma p(x,y,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-\gamma} \tag{3}$$

при всех α, β, γ.

Мы докажем, что (1) – ПДО из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, и вычислим асимптотическое разложение его символа.

Но сначала мы "развяжем себе руки" в отношении порядка интегрирования. Если $m < -n$, то интеграл (1) абсолютно сходится, но при $m \ge -n$ мы пока должны считать, что интегрирование по y предшествует интегрированию по ξ. Поясним, что интеграл

$$v(x,\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy$$

абсолютно сходится и не превосходит $C(1+|\xi|)^m$, но то же верно для $\xi^\alpha v(x,\xi)$ при любом α (это проверяется интегрированием по частям по y), поэтому он быстро убывает при $\xi \to \infty$, так что интеграл

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} v(x,\xi)\, d\xi$$

тоже абсолютно сходится.

Однако интеграл (1) *допускает регуляризацию*, после которой порядок интегрирования перестает играть существенную роль.

Первый способ регуляризации состоит в следующем. Возьмем функцию $\theta_0(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 вблизи начала. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости,

$$\begin{aligned} Au(x) &= (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \int \theta_0(\varepsilon\xi) e^{ix\cdot\xi} v(x,\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint \theta_0(\varepsilon\xi) e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \end{aligned}$$

и здесь “двойной” интеграл под знаком предела абсолютно сходится.

Мы укажем еще второй способ регуляризации, но пользоваться будем только первым. Введем оператор

$$L = (1+|\xi|^2)^{-1}\Big(\sum_1^n \xi_j D_j - 1\Big), \tag{4}$$

где $D_j = -i\partial/\partial y_j$. Мы имеем

$$e^{-iy\cdot\xi} = -Le^{-iy\cdot\xi} = \dots = (-1)^k L^k e^{-iy\cdot\xi}. \tag{5}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} v(x,\xi) &= (-1)^k \int L^k e^{-iy\cdot\xi}[p(x,y,\xi)u(y)]\,dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} L^k[p(x,y,\xi)u(y)]\,dy \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi} \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha(x,y,\xi) D^\alpha u(y)\,dy, \end{aligned}$$

и легко проверить, что здесь $p_\alpha \in S^{m-k}$. Таким образом,

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \sum_{|\alpha|\le k} p_\alpha(x,y,\xi) D^\alpha u(y)\,dy. \tag{6}$$

Здесь надо взять такое k, что $m-k < -n$, и тогда “двойной” интеграл справа будет абсолютно сходящимся. Это и есть второй способ регуляризации.

В дальнейшем используется обозначение $\alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_n!$.

Теорема 1. *Пусть $p(x,y,\xi) \in S^m(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$. Тогда A – ПДО из Ψ^m с символом*

$$a(x,\xi) \sim \sum_\alpha p_\alpha(x,\xi), \tag{7}$$

где

$$p_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha p(x,y,\xi)\big|_{y=x} \in S^{m-|\alpha|}. \tag{8}$$

Доказательство. Объясним, как возникает формула (7). Разложим $p(x,y,\xi)$ как функцию от y по формуле Тейлора по степеням $y-x$ с центром разложения в точке x:

$$p(x,y,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} q_\alpha(x,\xi)(y-x)^\alpha + \rho_N(x,y,\xi), \tag{9}$$

где

$$q_\alpha(x,\xi) = \frac{1}{\alpha!}\partial_y^\alpha p(x,y,\xi)\big|_{y=x} \in S^m(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n). \tag{10}$$

Остаток ρ_N мы выпишем позднее. Слагаемым в сумме (9) отвечают операторы

$$(2\pi)^{-n}\iint(-1)^{\alpha}[D_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi}]q_\alpha(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi.$$

Если $m<-n$, то можно переставить интегралы по y и по ξ и проинтегрировать по частям по ξ. Эти операторы примут вид

$$(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}p_\alpha(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{11}$$

Если же условие $m<-n$ не выполнено, то тот же результат получается при помощи (первой) регуляризации. А именно, мы должны рассмотреть

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint(-1)^{\alpha}[D_\xi^\alpha e^{i(x-y)\cdot\xi}]\theta_0(\varepsilon\xi)q_\alpha(x,\xi)u(y)\,dy\,d\xi$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}D_\xi^\alpha[\theta_0(\varepsilon\xi)q_\alpha(x,\xi)]u(y)\,dy\,d\xi.$$

Здесь производная $D_\xi^\alpha[\ldots]$ вычисляется по формуле Лейбница. Это линейная комбинация произведений функций $D_\xi^\beta q_\alpha(x,\xi)\in S^{m-|\beta|}$ и $D_\xi^\gamma\theta_0(\varepsilon\xi)$, $\beta+\gamma=\alpha$. Очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ поточечно

$$\theta_0(\varepsilon\xi)\to 1,\quad D_\xi^\gamma\theta_0(\varepsilon\xi)\to 0\ \ (\gamma\neq 0).$$

Лемма.

$$|\partial_\xi^\gamma[\theta_0(\varepsilon\xi)]|\leq C_\gamma(1+|\xi|)^{-\gamma}, \tag{12}$$

где C_γ не зависит от ε.

Действительно, $\xi^\gamma\partial_\xi^\gamma\theta_0(\xi)$ – ограниченная функция, так что

$$\xi^\gamma\partial_\xi^\gamma[\theta_0(\varepsilon\xi)]=\varepsilon^{|\gamma|}\xi^\gamma(\partial_\xi^\gamma\theta_0)(\varepsilon\xi)$$

– функция, равномерно ограниченная по ε и ξ.

Теперь имеем

$$\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}D_\xi^\beta q_\alpha(x,\xi)D_\xi^\gamma\theta_0(\varepsilon\xi)u(y)\,dy\,d\xi=\int e^{ix\cdot\xi}D_\xi^\beta q_\alpha(x,\xi)D_\xi^\gamma\theta_0(\varepsilon\xi)v(\xi)\,d\xi,$$

где $v=Fu$, и здесь в последнем интеграле подинтегральное выражение имеет интегрируемую мажоранту, не зависящую от ε. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, при $\varepsilon\to 0$ интеграл сходится к 0 при $\gamma\neq 0$ и к

$$\int e^{ix\cdot\xi}p_\alpha(x,\xi)v(\xi)\,d\xi$$

при $\gamma=0$, т.е. у нас опять получается оператор (11).

По правой части в (7) символ $a(x,\xi)$ строится по теореме Хёрмандера.

Теперь надо исследовать остаточный член в формуле Тейлора (9). Его можно записать в интегральной форме, придав ему вид

$$\rho_N(x,y,\xi) = \sum_{|\beta|=N+1} \rho_\beta(x,y,\xi)(y-x)^\beta, \tag{13}$$

где

$$\rho_\beta(x,y,\xi) = \frac{N+1}{\beta!}\int_0^1 (1-\tau)^N (\partial_y^\beta p[x, x+\tau(y-x), \xi]\, d\tau \tag{14}$$

Это бесконечно гладкие функции. Формула есть в университетских учебниках по анализу. Функции ρ_β наследуют принадлежность к S^m. В дальнейшем используется только последнее обстоятельство.

Остаточному члену в формуле (9) отвечает оператор, который при помощи той же регуляризации записывается в виде

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\beta|=N+1} \lim_{\varepsilon\to 0} \iint (y-x)^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi}\theta_0(\varepsilon\xi)\rho_\beta(x,y,\xi)u(y)\, d\xi\, dy.$$

Здесь

$$(y-x)^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi} = (-1)^{|\beta|} D_\xi^\beta e^{i(x-y)\cdot\xi}.$$

Перенося D^β на $\theta_0(\varepsilon\xi)\rho_\beta(x,y,\xi)$ и используя при предельном переходе такие же соображения, как выше, мы получаем, что

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} r_N(x,y,\xi)u(y)\, dy\, d\xi, \tag{15}$$

где

$$r_N(x,y,\xi) = \sum_{|\beta|=N+1} D_\xi^\beta \rho_\beta(x,y,\xi) \in S^{m-N-1}(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n). \tag{16}$$