ЛЕКЦИЯ 4

Итак, мы имеем

$$A - a(x,D) = [A - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,D)] - [a(x,D) - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,D)] = R_N - \widetilde{R}_N,$$

где

$$R_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} r_N(x,y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \tag{16}$$

– оператор с амплитудой $r_N \in S^{m-N-1}$ и

$$\widetilde{R}_N u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} \widetilde{r}_N(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \tag{17}$$

– ПДО с символом

$$\widetilde{r}_N(x,\xi) = a(x,\xi) - \sum_{|\alpha|\le N} a_\alpha(x,\xi) \in S^{m-N-1}.$$

Считая, что $m - N - 1 < -n$, мы можем переписать оба эти оператора в виде интегральных операторов:

$$R_N u(x) = \int k_N(x,y) u(y)\, dy \quad \text{и} \quad \widetilde{R}_N u(x) = \int \widetilde{k}_N(x,y) u(y)\, dy. \tag{18}$$

Свойства их ядер улучшаются с ростом N, и в итоге получается, что $A - a(x,D)$ – оператор с ядром из $K^{-\infty}$, так что это ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Детали проверьте самостоятельно, используя соображения из доказательства теоремы о ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Таким образом, A – ПДО из Ψ^m с указанным выше асимптотическим разложением символа. □

Отметим, что в формуле (8) можно заменить (одновременно) D_ξ и ∂_y на ∂_ξ и D_y. Это замечание относится и к некоторым дальнейшим формулам.

2. Оператор, формально сопряженный к ПДО. Пусть A и $A^{(*)}$ – операторы, действующие для простоты в пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Оператор $A^{(*)}$ называется *формально сопряженным* к A, если

$$(Au, v) = (u, A^{(*)}v) \quad (u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)). \tag{1}$$

Здесь и дальше (u,v) – обычное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$(u,v) = \int u(x)\overline{v(x)}\, dx. \tag{2}$$

Слово “формально” подчеркивает то обстоятельство, что операторы A и $A^{(*)}$ не рассматриваются как операторы в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (ограниченные или неограниченные).

Примеры. 1.Пусть A – интегральный оператор

$$Au(x) = \int k(x,y)u(y)\,dy \tag{3}$$

с ядром, скажем, из $L_2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Тогда $A^{(*)}$ – тоже интегральный оператор:

$$A^{(*)}v(y) = \int \overline{k(x,y)}v(x)\,dx. \tag{4}$$

2. Пусть A – дифференциальный оператор

$$A = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha \tag{5}$$

для простоты с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда $A^{(*)}$– тоже дифференциальный оператор:

$$A^{(*)} = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha[\overline{a_\alpha(x)}\cdot]. \tag{6}$$

Проверьте это самостоятельно. В этих примерах соотношение (1) распространяется на более широкие классы функций. А именно, в первом случае операторы являются ограниченными в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и соотношение (1) распространяется на функции u, v из $L_2(\mathbb{R}^n)$. В втором случае мы имеем ограниченные операторы из соболевского пространства $H^m(\mathbb{R}^n)$ (см. лекции предыдущего семестра) в $L_2(\mathbb{R}^n)$, и соотношение (1) распространяется на функции u, v из $H^m(\mathbb{R}^n)$. Сейчас мы рассмотрим ПДО, для них у нас пока нет теоремы об ограниченности в соболевских пространствах.

Теорема 2. *Пусть A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$. Тогда существует формально сопряженный оператор $A^{(*)}$, и это ПДО из Ψ^m с символом $a^{(*)}(x,\xi)$, имеющим асимптотическое разложение*

$$a^{(*)}(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha \overline{a(x,\xi)}. \tag{7}$$

Доказательство. Запишем Au в виде

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)Fu(\xi)\,d\xi.$$

Имеем

$$(Au,v) = (2\pi)^{-n}\int \overline{v(x)}\int e^{ix\cdot\xi}a(x,\xi)Fu(\xi)\,d\xi\,dx = (2\pi)^{-n}\int Fu(\xi)\overline{w(\xi)}\,d\xi,$$

где (мы заменяем x на y)

$$w(\xi) = \int e^{-iy\cdot\xi}\overline{a(y,\xi)}v(y)\,dy.$$

Как нетрудно проверить, это функция из пространства Шварца. (Очевидно, что $|w(\xi)| \le C(1+|\xi|)^m$, но аналогичная оценка получается для $\xi^\alpha w(\xi)$ и $\xi^\alpha D_\xi^\beta w(\xi)$.) Воспользуемся равенством Парсеваля

$$(2\pi)^{-n} \int Fu(\xi)\overline{w(\xi)}\, d\xi = \int u(x)\overline{F^{-1}w(x)}\, dx$$

(или, что то же, подставим $Fu(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx$ и переставим интегралы). Мы видим, что

$$(Au, v) = (u, A^{(*)}v),$$

где

$$A^{(*)}v(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi}\overline{a(y,\xi)}v(y)\, dy\, d\xi. \tag{8}$$

Теперь воспользуемся теоремой 1. Оператор $A^{(*)}$ – это ПДО с не зависящей от x амплитудой $\overline{a(y,\xi)}$, он принадлежит Ψ^m, и эта теорема дает нам асимптотическое разложение (7) символа $a^{(*)}$. $\square$

В дальнейшем мы будем рассматривать и матричные ПДО с матричными символами, переводящие вектор-функции в вектор-функции. В этом случае только что доказанная теорема тоже верна, но в формуле (7) надо заменить комплексно-сопряженную к a функцию $\overline{a}$ эрмитово-сопряженной к a матрицей a^*:

$$a^{(*)} \sim \sum \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha a^*(x,\xi). \tag{9}$$

3. Формально транспонированный оператор. Положим

$$\langle u, v\rangle = \int uv\, dx. \tag{10}$$

Назовем оператор $A^{(\prime)}$ *формально транспонированным к* A, если

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, A^{(\prime)}v\rangle \quad (u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)). \tag{11}$$

Это соотношение равносильно соотношению

$$(Au, \overline{v}) = (u, \overline{A^{(\prime)}v}),$$

так что

$$A^{(\prime)}v = \overline{A^{(*)}\overline{v}}, \;\; \text{или} \;\; A^{(*)}v = \overline{A^{(\prime)}\overline{v}}. \tag{12}$$

Если A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$, то из формулы (8) получаем

$$A^{(\prime)}v(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{-i(x-y)\cdot\xi} a(y,\xi)v(y)\, dy\, d\xi.$$

Но здесь необычный знак в экспоненте. Заменяя ξ на $-\xi$, получаем

$$A^{(\prime)}v(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(y,-\xi)v(y)\, dy\, d\xi. \tag{13}$$

Используя теперь теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть A – ПДО из Ψ^m с символом $a(x,\xi)$. Тогда $A^{(\prime)}$ – ПДО из Ψ^m с символом $a^{(\prime)}(x,\xi)$, имеющим следующее асимптотическое разложение*:

$$a^{(\prime)}(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha [a(x,-\xi)]. \tag{14}$$

4. Дуальное представление ПДО. Заметим, что $(A^{(\prime)})^{(\prime)} = A$ (и также $(A^{(*)})^{(*)} = A$). Поэтому наш ПДО $A = a(x,D)$ допускает запись

$$a(x,D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a_d(y,\xi) u(y)\, dy\, d\xi, \tag{15}$$

где $a_d(y,\xi) = a^{(\prime)}(y,-\xi)$, или

$$a_d(x,\xi) = a^{(\prime)}(x,-\xi). \tag{16}$$

Эта функция называется *дуальным символом* ПДО A, а формула (15) – его *дуальным представлением.* Таким образом, дуальное представление имеет вид

$$a(x,D)u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]] \tag{17}$$

в отличие от обычного представления

$$a(x,D)u(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[a(x,\xi)F_{y\to\xi}[u(y)]]. \tag{18}$$

Используя формулы (14) и (16), получаем *асимптотическое разложение для дуального символа*

$$a_d(x,\xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \partial_x^\alpha a(x,\xi). \tag{19}$$

Отметим, что если дифференциальный оператор записан в виде

$$a(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} D^\alpha [b_\alpha(x) u(x)], \tag{20}$$

то его дуальный символ есть

$$a_d(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha(x) \xi^\alpha. \tag{21}$$

Действительно, для оператора (21) имеем

$$a(x,D)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} F^{-1} \xi^\alpha F[b_\alpha(x) u(x)],$$

и получается формула (17) с дуальным символом (21).

5. ПДО на обобщенных функциях. До сих пор мы рассмативали ПДО на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Используя дуальный к A ПДО $A^{(\prime)}$, можно распространить действие оператора A на обобщенные функции из пространства Шварца $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{S}$. Это делается по формуле

$$\langle Af, u\rangle = \langle f, A'u\rangle \quad (u \in \mathcal{S}, f \in \mathcal{S}'). \tag{22}$$

Здесь $\langle g, v\rangle$ – обозначение для результата применения функционала (обобщенной функции) g к основной функции v. Из теоремы 3 сразу получается

Теорема 4. *Псевдодифференциальный оператор A из Ψ^∞ действует непрерывным образом в $\mathcal{S}'$.*

Здесь непрерывность надо понимать в следующем смысле: если $f_m \to f$ в $\mathcal{S}'$ (т.е. $\langle f_m, u\rangle \to \langle f, u\rangle$ для любой функции $u \in \mathcal{S}$), то $Af_m \to Af$. Непрерывность проверяется очевидным образом:

$$\langle Af_m, u\rangle = \langle f_m, A^{(\prime)}u\rangle \to \langle f, A'u\rangle = \langle Af, u\rangle.$$

6. Формула для символа. В частности, имеет смысл $Ae^{ix\cdot\eta}$.

Теорема 4. *Для символа ПДО $A = a(x, D)$ имеет место формула*

$$a(x, \eta) = e^{-ix\cdot\eta} a(x, D_x) e^{ix\cdot\eta}. \tag{23}$$

Таким образом, символ ПДО однозначно определен этим оператором (в отличие от амплитуды).

Доказательство теоремы. Имеем

$$\langle Ae^{ix\cdot\eta}, u(x)\rangle = \langle e^{ix\cdot\eta}, A^{(\prime)}u(x)\rangle = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\int e^{ix\cdot\xi}\int e^{-iy\cdot\xi}a(y, -\xi)u(y)\,dy\,d\xi\,dx.$$

Заменим здесь ξ на $-\xi$. Получим, что это выражение равно

$$(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}\int e^{-ix\cdot\xi}\left[\int e^{iy\cdot\xi}a(y, \xi)u(y)\,dy\right]d\xi\,dx.$$

Здесь два внешних интеграла с множителем $(2\pi)^{-n}$ – это обратное и прямое преобразования Фурье: $F^{-1}_{x\to\eta}F_{\xi\to x}$. Поэтому их можно убрать, заменив ξ на η в остающемся интеграле:

$$\langle Ae^{ix\cdot\eta}, u(x)\rangle = \int e^{iy\cdot\eta}a(y, \eta)u(y)\,dy = \langle e^{ix\cdot\eta}a(x, \eta), u(x)\rangle,$$

что и дает формулу (23).

7. Композиция двух ПДО. Следующая теорема, – может быть, важнейшая в исчислении ПДО.

Теорема 5. *Пусть $A = a(x, D)$ и $B = b(x, D)$ – ПДО соответственно из Ψ^{m_1} и Ψ^{m_2}. Тогда $C = BA$ – ПДО из $\Psi^{m_1+m_2}$ с символом $c(x, \xi)$, имеющим асимптотическое разложение*

$$c(x, \xi) \sim \sum \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha b(x, \xi)\partial_x^\alpha a(x, \xi). \tag{24}$$