ЛЕКЦИЯ 5.

Доказательство теоремы 5. Мы запишем ПДО B в обычной форме и ПДО A в дуальной форме:

$$(Bv)(x) = F^{-1}_{\xi\to x} b(x,\xi) F_{z\to\xi}[v(z)], \tag{25}$$

где

$$v(z) = (Au)(z) = F^{-1}_{\xi\to z} F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]. \tag{26}$$

Подставим (26) в (25) и опустим $F_{z\to\xi}F^{-1}_{\xi\to z}$. Получим

$$Cu(x) = F^{-1}_{\xi\to x}[b(x,\xi)F_{y\to\xi}[a_d(y,\xi)u(y)]] = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b(x,\xi)a_d(y,\xi)\,dy\,d\xi. \tag{27}$$

Это ПДО с амплитудой $b(x,\xi)a_d(y,\xi) \in S^{m_1+m_2}$. Его символ $c(x,\xi)$ имеет асимптотическое разложение

$$c(x,\xi) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha[b(x,\xi)D_x^\alpha a_d(x,\xi)], \tag{25}$$

и здесь

$$a_d(x,\xi) \sim \sum \frac{1}{\beta!}(-1)^{|\beta|}\partial_\xi^\beta D_x^\beta a(x,\xi) \tag{26}$$

по формуле (19). Подставим (26) в (25) и вычислим ∂_ξ^α по *формуле Лейбница*

$$\partial^\alpha[f\cdot g] = \sum_{\gamma+\delta=\alpha}\frac{\alpha!}{\gamma!\delta!}\partial^\gamma f\cdot\partial^\delta g.$$

Получим

$$c(x,\xi) \sim \sum_{\beta,\gamma,\delta}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\gamma!\delta!}\partial_\xi^\gamma b(x,\xi)\cdot\partial_\xi^{\beta+\delta}D_x^{\beta+\gamma+\delta}a(x,\xi) \tag{27}$$

Это асимптотический ряд, в котором порядок слагаемых падает с ростом $|\beta|+|\gamma|+|\delta|$. Теперь мы воспользуемся *формулой Ньютона*

$$(\eta-\xi)^\varkappa = \sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{\varkappa!}{\beta!\delta!}(-1)^{|\beta|}\xi^\beta\eta^\delta. \tag{28}$$

Полагая здесь $\xi=\eta=(1,\dots,1)$, получаем

$$0 = \sum_{\beta+\delta=\varkappa}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!\delta!} \text{ при } \varkappa\neq(0,\dots,0).$$

Поэтому формула (27) принимает вид

$$c(x,\xi) \sim \sum_\gamma\frac{1}{\gamma!}\partial_\xi^\gamma b(x,\xi)\cdot D_x^\gamma a(x,\xi). \quad \square$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Замечания.

1. В этом асимптотическом разложении главный член есть ba.

2. Если A и B – скалярные ПДО, то для их *коммутатора*

$$[A, B] = AB - BA$$

получаем $[A, B] \in S^{m_1+m_2-1}$. В матричном случае это верно при условии перестановочности символов a и b. В частности, достаточно, чтобы один из этих символов был скалярной матрицей.

3. Для дифференциальных операторов доказанная формула допускает непосредственную проверку; при этом достаточно рассматривать "одночлены" $b(x)\partial_x^{m_2}$ и $a(x)\partial_x^{m_1}$.

8. Локальность дифференциальных операторов и псевдолокальность псевдодифференциальных операторов. Нам понадобятся определения, которые уже встречались в курсе обобщенных функций.

Определение 1. *Носителем* $\operatorname{supp} u$ непрерывной функции $u(x)$ называется замыкание множества точек, в которых $u(x) \neq 0$. Носитель $\operatorname{supp} u$ можно также определить как наименьшее замкнутое множество, вне которого $u(x) = 0$.

Предложение 1. *Пусть φ и ψ – две функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с не пересекающимися носителями. Тогда если A – дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$, то $\varphi A \psi\cdot$ – нулевой оператор, а если A – ПДО из Ψ^∞, то $\varphi A \psi\cdot$ – ПДО из $\Psi^{-\infty}$.*

Здесь первое утверждение очевидно. Второе проверяется при помощи теоремы о композиции. Действительно, если A имеет символ $a(x, \xi)$, то из определения ПДО видно, что φA – ПДО с символом $\varphi(x)a(x, \xi)$. Теперь применяем теорему о композиции к ПДО φA и оператору умножения на ψ. Получается ПДО с асимптотическим разложением символа, состоящим из одних нулей.

Определение 2. Для обобщенной функции u, например, из $\mathcal{S}'$ определим ее *носитель* $\operatorname{supp} u = F$ как наименьшее замкнутое множество, вне которого $u = 0$. Это означает, что $\langle u, \varphi \rangle = 0$, если носитель основной функции $\varphi \in \mathcal{S}$ содержится в дополнении к F.

Предложение 2. *Если A – дифференциальный оператор с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$, то он обладает следующим свойством локальности*:

$$\operatorname{supp} Au \subset \operatorname{supp} u. \tag{29}$$

Действительно, если

$$A = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

то

$$\langle Au, \varphi \rangle = \langle u, \psi \rangle, \text{ где } \psi = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi,$$

и если носитель функции φ лежит в дополнении к $F = \operatorname{supp} u$, то то же верно для функции ψ, так что $\langle u, \psi \rangle = 0$.

Псевдодифференциальный оператор может быть интегральным оператором, так что в общем случае он не обладает свойством локальности.

Определение 3. Пусть $u(x)$ – обычная функция на $\mathbb{R}^n$. Ее *сингулярным носителем* $\operatorname{sing\,supp} u$ называется наименьшее замкнутое множество F, вне которого она является бесконечно гладкой функцией.

Определение 4. Пусть u – обобщенная функция, например, из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ее *сингулярным носителем* $\operatorname{sing\,supp} u$ называется наименьшее замкнутое множество F, вне которого она совпадает с бесконечно гладкой функцией.

Теорема 6. *Псевдодиференциальный оператор $A \in \Psi^\infty$ является псевдолокальным оператором в следующем смысле:*

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть Ω – дополнение к $F = \operatorname{sing\,supp} u$ и φ, φ_1, φ_2 – три бесконечно гладких функции с компактными носителями, лежащими внутри Ω, причем φ_1 равна 1 в окрестности носителя функции φ и φ_2 равна 1 в окрестности носителя функции φ_1. Имеем

$$\langle Au, \varphi \rangle = \langle Au, \varphi_1 \varphi \rangle = \langle \varphi_1 A \varphi_2 u, \varphi \rangle + \langle \varphi_1 A (1 - \varphi_2) u, \varphi \rangle. \tag{31}$$

Здесь $\varphi_2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, так как u – бесконечно гладкая функция в Ω; $A\varphi_2 u \in \mathcal{S}$, так как A действует в $\mathcal{S}$; $\varphi_1 A \varphi_2 u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Поэтому первое слагаемое справа в (31) – результат действия бесконечно гладкой функции на φ. Во втором слагаемом надо учесть определение действия ПДО на обобщенную функцию и то обстоятельство, что u как обобщенная функция из $\mathcal{S}'$ есть конечная сумма производных в смысле обобщенных функций от непрерывных функций $u_\alpha(x)$ не выше чем степенного роста (см. лекции прошлого семестра):

$$u = \sum_{|\alpha| \le N} \partial^\alpha u_\alpha(x).$$

Это второе слагаемое переписывается в виде

$$\langle \sum_{|\alpha| \le N} \partial^\alpha u_\alpha(x), (1 - \varphi_2) A^{(\prime)} \varphi_1 \varphi \rangle. \tag{32}$$

Оператор, действующий здесь на φ, принадлежит $\Psi^{-\infty}$ в силу предложения 1, так что это интегральный оператор с ядром $k(x, y)$ из $K^{-\infty}$. Поэтому выражение (32) переписывается в виде линейной комбинации выражений

$$\langle u_\alpha(x), \partial_x^\alpha \int k(x, y) \varphi(y) \rangle. \tag{33}$$

Переносим производные на k дифференцированием под знаком интеграла, получается интегральный оператор с ядром $k_\alpha(x, y)$ снова из $K^{-\infty}$. Перебрасываем формально транспонированный оператор на $u_\alpha(x)$, это возможно, так как

$\varphi(y)$ имеет компактный носитель, а $k_\alpha(x,y)$ быстро убывает при удалении x от этого носителя. Выражение (33) после перестановки интегралов принимает вид

$$\langle g_\alpha(y), \varphi(y)\rangle, \text{ где } g_\alpha(y) = \int k_\alpha(x,y) u_\alpha(x)\, dx$$

– бесконечно гладкая функция. □

Замена переменных в ПДО. Рассмотрим ПДО

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) u(y)\, dy\, d\xi \tag{34}$$

из Ψ^m и две области Ω и $\widetilde{\Omega}$ в $\mathbb{R}^n$. Точки первой (и наборы их координат) будем обозначать через x, точки второй – через $\widetilde{x}$. Пусть эти области связаны диффеоморфизмом класса C^∞

$$\widetilde{x} = \varphi(x), \quad x = \psi(\widetilde{x}), \tag{35}$$

это взаимно обратные отображения. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – две функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими внутри Ω. Им соответствуют бесконечно гладкие функции от $\widetilde{x}$

$$\beta_1(\widetilde{x}) = \alpha_1(\psi(\widetilde{x})), \quad \beta_2(\widetilde{x}) = \alpha_2(\psi(\widetilde{x}))$$

с носителями, лежащими в $\widetilde{\Omega}$, продолженные нулем вне $\widetilde{\Omega}$. Мы рассмотрим оператор

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = \alpha_1(x) A(\alpha_2 u)\big|_{x=\psi(\widetilde{x})}, \text{ где } u = v[\varphi(x)] \text{ в } \Omega.$$

Здесь подразумевается следующее. Функция v определена на $\mathbb{R}^n$. Функция u определена в Ω, а $\alpha_2 u$ продолжается нулем вне Ω.

Мы докажем, что это ПДО из Ψ^m, и вычислим асимптотическое разложение его символа. Но для простоты подробно рассмотрим только случай $m < -n$. Случай $m \geq -n$ рассматривается при помощи регуляризации.

Мы имеем

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \beta_1(\widetilde{x}) \iint e^{i[\psi(\widetilde{x})-y]\cdot\xi} a(\psi(\widetilde{x}),\xi) \alpha_2(y) u(y)\, dy\, d\xi.$$

Подставим $y = \psi(\widetilde{y})$ во внутреннем интеграле. Получим

$$(\widetilde{A}v)(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i[\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y})]\cdot\xi} b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi) v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\xi,$$

где

$$b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi) = \beta_1(\widetilde{x}) a(\psi(\widetilde{x}),\xi) \beta_2(\widetilde{y}) \left| \det \frac{\partial\psi(\widetilde{y})}{\partial\widetilde{y}} \right|.$$

По формуле Адамара

$$\psi(\widetilde{x}) - \psi(\widetilde{y}) = \Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})(\widetilde{x} - \widetilde{y}), \tag{36}$$

где

$$\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \widetilde{y}}[\widetilde{y} + t(\widetilde{x} - \widetilde{y})]\, dt. \tag{37}$$

Как известно, эта матрица бесконечно гладкая в $\widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$, и она обратима при $\widetilde{x} = \widetilde{y}$, будучи равна там $\partial\psi(\widetilde{x})/\partial\widetilde{x}$. Предположим, что матрица $\Psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ обратима при

$$|\widetilde{x} - \widetilde{y}| < \varepsilon, \quad \widetilde{x} \in \operatorname{supp} \beta_1, \quad \widetilde{y} \in \operatorname{supp} \beta_2. \tag{38}$$

Возьмем срезающую функцию $\theta_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равную 1 при $|x| \leq \varepsilon/3$ и 0 при $|x| \geq 2\varepsilon/3$, и запишем $\widetilde{A}$ в виде суммы $\widetilde{A}_1 v + \widetilde{A}_2 v$, где

$$\widetilde{A}_1 v(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\widetilde{x} - \widetilde{y}) \cdot \Psi'(\widetilde{x}, \widetilde{y})\xi} b(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \xi) \theta_0(\widetilde{x} - \widetilde{y}) v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\xi, \tag{39}$$

где штрих возле Ψ означает транспозицию матрицы и

$$\widetilde{A}_2 v(\widetilde{x}) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(\widetilde{x} - \widetilde{y}) \cdot |Psi'(\widetilde{x}, \widetilde{y})\xi} b(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \xi)[1 - \theta_0(\widetilde{x} - \widetilde{y})] v(\widetilde{y})\, d\widetilde{y}\, d\xi. \tag{40}$$

Из этих двух операторов главным является $\widetilde{A}_1$. Мы покажем, что это ПДО из Ψ^m в амплитудном представлении, а $\widetilde{A}_2 \in \Psi^{-\infty}$.