ЛЕКЦИЯ 6.

Рассмотрим оператор (39). Поменяем местами интегралы по $\widetilde{y}$ и ξ и сделаем подстановку

$$\Psi'(\widetilde{x},\widetilde{y})\xi=\eta$$

во внутреннем интеграле. Затем снова поменяем местами интегралы. Получим

$$\widetilde{A}_1 v(\widetilde{x})=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(\widetilde{x}-\widetilde{y})\cdot\eta}b^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\eta)v(\widetilde{y})\,d\widetilde{y}\,d\eta, \tag{41}$$

где

$$b^{(1)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\eta)=b(\widetilde{x},\widetilde{y},\Psi'^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})\eta)\cdot|\det\Psi(\widetilde{x},\widetilde{y})|^{-1}\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y}). \tag{42}$$

Несложно проверить, что это амплитуда из S^m. Значит, $\widetilde{A}_1$ – ПДО из Ψ^m.

Перейдем к оператору (40). Его можно представить в виде

$$\widetilde{A}_2 v(\widetilde{x})=\int k(\widetilde{x},\widetilde{y})v(\widetilde{y})\,d\widetilde{y}, \tag{43}$$

где

$$k(\widetilde{x},\widetilde{y})=(2\pi)^{-n}\int e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi}b^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)\,d\xi \tag{44}$$

с

$$b^{(2)}(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)=b(\widetilde{x},\widetilde{y},\xi)[1-\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y})]. \tag{45}$$

Проверим, что это ядро из $K^{-\infty}$. Пока ясно, что оно непрерывно и равно нулю при больших $|\widetilde{x}|+|\widetilde{y}|$. Функция $b^{(2)}$ и равна нулю также при малых $|\widetilde{x}-\widetilde{y}|$. Это позволяет записать стоящую перед ней экспоненту в виде

$$e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi}=\frac{(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\partial_\xi}{i|\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y})|^2}e^{i(\psi(\widetilde{x})-\psi(\widetilde{y}))\cdot\xi}.$$

Интегрируя по частям, мы заменяем $b^{(2)}$ на функцию из S^{m-1}. Повторяя эту процедуру, заменяем $b^{(2)}$ функцией из S^{m-N} с произвольно большим N. Отсюда видно, что $k\in C^\infty$ и, значит, $k\in K^{-\infty}$.

Итак, $\widetilde{A}_2\in\Psi^{-\infty}$ и $\widetilde{A}\in\Psi^m$.

Асимптотическое разложение символа этого ПДО записывается громоздкой формулой

$$\widetilde{a}(\widetilde{x},\eta)\sim\sum\frac{1}{\alpha!}\beta_1(\widetilde{x})\partial_\eta^\alpha D_{\widetilde{y}}^\alpha\bigl\{a[\psi(\widetilde{x}),\Psi'^{-1}(\widetilde{x},\widetilde{y})\eta]\beta_2(\widetilde{y})\left|\det\frac{\partial\psi(\widetilde{y})}{\partial\widetilde{y}}\right|\cdot|\det\Psi(\widetilde{x},\widetilde{y})|^{-1}\bigr\}\Bigr|_{\widetilde{y}=\widetilde{x}}. \tag{46}$$

Мы заменили $\theta_0(\widetilde{x}-\widetilde{y})$ на 1, так как эта функция равна 1 при малых $|\widetilde{x}-\widetilde{y}|$. Отметим, что определители берутся от взаимно обратных матриц при $\widetilde{y}=\widetilde{x}$. Главный член в (46) отвечает $\alpha=0$ и оказывается равным

$$\beta_1(\widetilde{x})a\bigl[\psi(\widetilde{x}),\left[\frac{\partial\psi(\widetilde{x})}{\partial\widetilde{x}}\right]'^{-1}\eta\bigr]\beta_2(\widetilde{x}). \tag{47}$$

К этому важному выражению мы еще вернемся.

3. ПДО в соболевских пространствах

1. Соболевские пространства. Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ рассматривалось в лекциях предыдущего семестра. Это пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме, определяемой равенством

$$\|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int |Fu(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s \, d\xi. \tag{1}$$

Множитель справа введен для того, чтобы при $s=0$ получалась норма в L_2: напомним, что равенство Парсеваля имеет вид

$$\int u(x)\overline{v(x)}\, dx = (2\pi)^{-n} \int Fu(\xi)\overline{Fv(\xi)}\, d\xi. \tag{2}$$

Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ сужается с ростом s и при $s > n/2$ состоит из непрерывных ограниченных функций (после их исправления, если понадобится, на множествах нулевой меры). С ростом s их гладкость повышается. При отрицательных s в эти пространства попадают обобщенные функции, не являющиеся обычными функциями.

Норма в $H^s(\mathbb{R}^n)$ допускает следующую запись:

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_0, \quad \text{где } \Lambda^s = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2} F, \tag{3}$$

это, как мы знаем, ПДО из Ψ^s.

В пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ при любом s плотны бесконечно гладкие финитные функции.

Про оператор A, определенный на таких функциях и удовлетворяющий на них неравенству $\|Au\|_{s-m} \le C_s \|u\|_s$ при любом s, говорят, что он *действует в шкале соболевских пространств* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *и имеет порядок* m. При каждом s такой оператор продолжается до оператора, действующего ограниченным образом из $H^s(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$.

Оператор порядка $-\infty$ – это оператор, действующий ограниченным образом из H^s в H^{s+N} со сколь угодно большим N при любом s.

2. Ограниченность ПДО в соболевских нормах.

Нам понадобится

Лемма Шура. *Рассмотрим интегральный оператор*

$$g(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{4}$$

Предположим, что конечны верхние грани

$$M_1 = \sup_x \int |K(x,y)|\, dy \quad \text{и} \quad M_2 = \sup_y \int |K(x,y)|\, dx. \tag{5}$$

Тогда оператор (1) *ограничен в* $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Более точно, имеет место неравенство*

$$\|g\|_0 \le \sqrt{M_1 M_2}\|f\|_0. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем в силу неравенства Шварца

$$|g(x)|^2 \le \int |K(x,y)|\,dy \int |K(x,y)||f(y)|^2 dy \le M_1 \int |K(x,y)||f(y)|^2 dy.$$

Отсюда

$$\|g(x)\|^2 \le M_1 M_2 \|f\|^2. \quad \square$$

Теперь мы докажем важнейшую теорему об ограниченности ПДО в соболевских пространствах. Смысл ее состоит в том, что ПДО порядка m в прежнем смысле (т.е. принадлежащий Ψ_m) имеет порядок m в новом смысле – как оператор в соболевской шкале.

Теорема. *Пусть* A *– ПДО из* Ψ^m, $m \in \mathbb{R}$. *Тогда* A *– ограниченный оператор из* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *в* $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ *при всех* $s \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Все нужные неравенства достаточно доказывать на финитных бесконечно гладких функциях.

1. Утверждение теоремы сразу получается для ПДО Λ^s в силу формулы (3) и очевидного соотношения $\Lambda^s\Lambda^t = \Lambda^{s+t}$. Теперь *общий случай сводится к случаю* $s = m = 0$ следующим образом:

$$A = \Lambda^{m-s} A_1 \Lambda^s, \ \text{ где } \ A_1 = \Lambda^{s-m} A \Lambda^{-s} \in \Psi^0 \tag{7}$$

в силу теоремы о композиции. Далее будем предполагать, что $s = m = 0$.

2. *Пусть символ* $a = a(\xi)$ *не зависит от* x. В этом случае нам не нужна его гладкость, достаточна ограниченность: $|a(x,\xi)| \le C_1$. Имеем

$$\|Au\|_0^2 = (2\pi)^{-n} \int |a(\xi) Fu(\xi)|^2\,d\xi \le C_1^2 (2\pi)^{-n} \int |Fu(\xi)|^2\,d\xi = C_1^2 \|u\|_0^2. \tag{8}$$

Это замечание сделано только с целью пояснить, что в случае не зависящего от x доказательство совсем простое.

3. *Пусть* $a(x,\xi) = 0$ *при* $|x| \ge r$, *где* r *не зависит от* ξ. Положим $v(x) = (Au)(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}(Fv)(\eta) = &(2\pi)^{-n} \int e^{-ix\cdot\eta} \int e^{ix\cdot\xi} a(x,\xi)(Fu)(\xi)\,d\xi\,dx = \\ &(2\pi)^{-n} \int b(\eta-\xi,\xi)(Fu)(\xi)\,d\xi,\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$b(\eta,\xi) = \int e^{-ix\cdot\eta} a(x,\xi)\,dx.$$

Это интеграл по шару радиуса r, и все функции

$$\eta^\alpha b(\eta,\xi) = \int e^{-ix\cdot\eta} D_x^\alpha a(x,\xi)\,dx$$

ограничены. Можем написать

$$|b(\eta-\xi,\xi)| \le C_2(1+|\eta-\xi)|)^{-(n+1)}, \tag{10}$$

где *постоянная* C_2 *зависит только от* r *и* $\max_{x,\xi}|\partial_x^\alpha a(x,\xi)|$, $|\alpha| \le n+1$. Из неравенства (10) следует ограниченность оператора (9) в силу леммы Шура, и остается использовать равенство Парсеваля (2).

4. *Пусть* $a(x,\xi) \in S^{-\infty}$. Тогда A – интегральный оператор с непрерывным (даже бесконечно гладким) ядром, удовлетворяющим, в частности, неравенству

$$|k(x,y)| \le C_3|x-y|^{-n-1}, \tag{11}$$

и его ограниченность снова следует из леммы Шура.

5. *Общий случай.* Зафиксируем две функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, такие, что $\varphi(x)$ неотрицательна, равна 1 при $|x| \le \sqrt{n}/2$ (это половина длины диагонали единичного куба в $\mathbb{R}^n$) и $\psi(x)$ равна 1 в окрестности носителя функции φ. Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x-\alpha)\left[\sum_\beta \varphi(x-\beta)\right]^{-1}, \quad \psi_\alpha(x) = \psi(x-\alpha), \tag{12}$$

где α пробегает целочисленную решетку в $\mathbb{R}^n$. Здесь сумма по β в каждой точке x положительна и состоит из конечного числа слагаемых, не превосходящего фиксированной постоянной. Функции φ_α образуют разбиение единицы. Мы имеем

$$A = \sum \varphi_\alpha A = A_1 + A_2, \text{ где } A_1 = \sum \varphi_\alpha A(1-\psi_\alpha)\cdot, \quad A_2 = \sum \varphi_\alpha A\psi_\alpha\,\cdot\,. \tag{13}$$

Оператор A_1 состоит из слагаемых, принадлежащих $\Psi^{-\infty}$ в силу предложения 1 из лекции 5. Для ядер $k_\alpha(x,y)$ этих операторов справедливы оценки

$$|x-y|^N|\partial_x^\beta\partial_y^\gamma k_\alpha(x,y)| \le C_{\beta,\gamma,N} \tag{14}$$

с постоянными, не зависящими от α. Но в любой точке x отлично от нуля только конечное число ядер $k_\alpha(x,y)$, ограниченное не зависящей от x постоянной. Поэтому аналогичная оценка верна для $\sum k_\alpha(x,y)$. А это означает, что $A_1 \in \Psi^{-\infty}$. Случай такого оператора уже рассмотрен в п. 4.

Остается доказать ограниченность оператора A_2. Используя неравенство Шварца, напишем

$$|A_2u(x)|^2 \le \sum_\alpha \varphi_\alpha^2 \sum_\beta |\psi_\beta A\psi_\beta u|^2$$

Первая сумма равномерно ограничена. В членах второй $\psi_\beta A$ – ПДО, к которым применим результат пункта 3, соответствующая оценка равномерна по β. Получаем

$$\|A_2u\|^2 \le C\sum_\beta \|\psi_\beta A\psi_\beta u\|^2 \le CC'\int\sum_\beta \psi_\beta^2(x)|u(x)|^2\,dx \le CC'C''\|u\|^2. \quad \Box \tag{15}$$