ЛЕКЦИЯ 7

4. Полиоднородные ПДО

Этот пункт содержит подготовку к рассмотрению эллиптических ПДО. Мы определим подкласс Ψ^m_{ph} класса Ψ^m, такой, что в нем каждый ПДО имеет, в частности, однородный по ξ главный символ.

Положим

$$\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Введем сначала класс *однородных* символов. Пусть $b(x,\xi)$ – функция на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_0$. Условимся писать

$$b \in S^m_h = S^m_h(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_0), \tag{2}$$

если

1) для $b(x,\xi)$ выполнено условие *положительной однородности степени* m по ξ

$$b(x,\tau\xi) = \tau^m b(x,\xi) \quad (\tau > 0, \xi \neq 0) \tag{3}$$

и

2) справедливы (равномерные) оценки

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta} |\xi|^{m-|\beta|} \quad (\xi \neq 0), \tag{4}$$

где постоянные не зависят от x, ξ.

Заметим, что такая функция не попадает в класс S^m, за исключением случая, когда m – натуральное число и это многочлен по ξ, однородный степени m (или $m = 0$ и b не зависит от ξ). Действительно, однородная функция от ξ, не являющаяся многочленом, имеет особенность в начале (если $m < 0$) или приобретает ее после достаточного числа дифференцирований по ξ.

Назовем теперь ПДО $A = a(x,D)$ из Ψ^m *полиоднородным* и будем писать $A \in \Psi^m_{ph} = \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$, если

$$a(x,\xi) \approx a_0(x,\xi) + a_1(x,\xi) + \dots, \tag{5}$$

где $a_\nu \in S^{m-\nu}_h$, в следующем смысле:

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi) - \sum_{\nu=0}^N a_\nu(x,\xi) \right] \right| \le C_{\alpha,\beta,N} |\xi|^{m-|\beta|-N-1} \ \text{ при } \ |\xi| \ge C > 0, \tag{6}$$

где постоянные $C_{\alpha,\beta,N}$ не зависят от x, ξ. Символ $a(x,\xi)$ тоже будем называть *полиоднородным* и будем писать $a \in S^m_{ph} = S^m_{ph}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Простейший пример – оператор в частных производных (с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty$). В этом случае разложения (5) конечны.

Еще пример: Λ^m. Асимптотическое разложение символа $\langle\xi\rangle^m = (1+|\xi|^2)^{m/2}$ этого ПДО в смысле (5) строится с использованием биномиального ряда:

$$\langle\xi\rangle^m = |\xi|^m \big[1 + \frac{m}{2}|\xi|^{-2} + \frac{(m/2)(m/2-1)}{2!}|\xi|^{-4} + \dots\big],$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

где все члены ряда надо умножить на $|\xi|^m$. Это разложение является в данном случае сходящимся при $|\xi| > 1$ рядом.

Примеры символов из S^1, не являющихся полиоднородными:

$$\langle\xi\rangle + \langle\xi\rangle^{1/2}, \quad \langle\xi\rangle + \langle\xi\rangle^{1/2}\ln\langle\xi\rangle.$$

Функции a_ν в (5) очевидным образом определяются однозначно. Функция $a_0(x,\xi)$ называется *главным символом* ПДО $A = a(x,D)$ (по-английски *principal symbol*). Функция $a(x,\xi)$ называется *полным символом* (*complete symbol*). Условие *равномерной эллиптичности* этого ПДО состоит в том, что

$$|a_0(x,\xi)| \geq C|\xi|^m, \tag{7}$$

где C – положительная постоянная.

Например, оператор Лапласа Δ имеет главный символ $-|\xi|^2$ и, конечно, равномерно эллиптичен. Оператор Λ^m имеет главный символ $|\xi|^m$ и тоже равномерно эллиптичен.

Пусть $\theta(\xi)$ – бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, равная 0 в окрестности начала и 1 вне большей окрестности. Тогда из (5) умножением на $\theta(\xi)$ получаем, что

$$a(x,\xi) \sim \theta(\xi)a_0(x,\xi) + \theta(\xi)a_1(x,\xi) + \dots. \tag{8}$$

Обратно, отсюда следует (5). Поэтому *по заданной последовательности* $\{a_\nu\}$ *однородных символов из* $S_h^{m-\nu}$ *строится полный символ с разложением* (5).

Если A и B – полиоднородные ПДО, то это же верно для их произведения $C = AB$, при этом его главный символ c_0 равен произведению a_0b_0 главных символов ПДО A и B.

Если A – полиоднородный ПДО с главным символом a_0, то формально сопряженный оператор $A^{(*)}$ – тоже полиоднородный ПДО, с главным символом $\overline{a}_0$ (в скалярном случае). Аналогичное утверждение верно в отношении формально транспонированного оператора, его главный символ совпадает с a_0.

Если мы делаем диффеоморфную замену переменных $x = \psi(y)$ в полиоднородном ПДО с главным символом $a(x,\xi)$, то получаем полиоднородный ПДО с главным символом

$$\widetilde{a}_0(y,\eta) = a_0\big[\psi(y), \left[\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\right]^{\prime -1}\eta\big]. \tag{9}$$

Ср. с формулой (47) в лекции 6. Сейчас мы пишем y вместо $\widetilde{x}$ и имеем в виду те точки x, в которых $\alpha_j(x) = 1$, $j = 1,2$. Формула (9) будет использована при рассмотрении ПДО на многообразиях.

В доказательстве ограниченности ПДО в соболевских нормах было использовано довольно много производных символа. Сейчас мы займемся уточнением оценки нормы для полиоднородного ПДО. Мы выясним ее связь с верхней гранью модуля главного символа.

Начнем со случая $m = s = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $A \in \Psi^0_{ph}$, $M = \sup|a_0(x,\xi)|$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $C_\varepsilon \geq 0$, *что*

$$\|Au\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|u\|_0 + C_\varepsilon\|u\|_{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Положим $M_1 = M + \varepsilon/2$. Тогда $M_1^2 - |a_0(x,\xi)|^2 > 0$, и можно проверить, что

$$b_0(x,\xi) = [M_1^2 - |a_0(x,\xi)|^2]^{1/2} \in S^0_h.$$

Пусть B – полиоднородный ПДО с главным символом b_0. Тогда

$$M_1^2 - A^*A - B^*B = T \in \Psi^{-1}_{ph},$$

поскольку это ПДО из Ψ^0_{ph} с нулевым главным символом. Теперь имеем

$$(Au, Au)_0 + (Bu, Bu)_0 = M_1^2(u,u)_0 - (Tu, u)$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\|Au\|_0^2 \leq & M_1^2\|u\|_0^2 + \|Tu\|_0\|u\|_0 \leq \\ & (M + \frac{\varepsilon}{2})^2\|u\|_0^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\|u\|_0^2 + \widetilde{C}_\varepsilon^2\|Tu\|_0^2 \leq \\ & \left[(M+\varepsilon)\|u\|_0 + \widetilde{C}_\varepsilon\|Tu\|\right]^2,\end{aligned}$$

так что

$$\|Au\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|u\|_0 + \widetilde{C}_\varepsilon C\|u\|_{-1}. \quad \square$$

Теперь мы рассмотрим полиоднородный ПДО порядка m.

Теорема 2. *Пусть* $A \in \Psi^m_{ph}$, $M = \sup_{x;|\xi|=1}|a_0(x,\xi)|$. *Тогда существует такое* $C_\varepsilon \geq 0$, *что при любом* s

$$\|Au\|_{s-m} \leq (M+\varepsilon)\|u\|_s + C_\varepsilon\|u\|_{s-1}. \tag{11}$$

Доказательство. Положим $A_1 = \Lambda^{s-m}A\Lambda^{-s}$. Это ПДО из Ψ^0_{ph}. Если $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, то $v = \Lambda^s u \in H^0(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda^{-s}v = u$. Мы уже знаем, что

$$\|A_1 v\|_0 \leq (M+\varepsilon)\|v\|_0 + C_\varepsilon\|v\|_{-1}.$$

Эта оценка совпадает с доказываемой. $\square$

Теорема 3. *Пусть* A – *любой оператор, для которого при некотором* s *справедлива оценка*

$$\|Au\|_{s-m} \leq C_1\|u\|_s + C_2\|u\|_{s-1} \qquad (u \in H^s(\mathbb{R}^n)). \tag{12}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой оператор T, действующий ограниченным образом из пространства $H^t(\mathbb{R}^n)$ со сколь угодно большим по модулю отрицательным t в $H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$, что

$$\|(A-T)u\|_{s-m} \leq (C_1+\varepsilon)\|u\|_s. \tag{13}$$

При этом если A – ПДО порядка m, то T – ПДО порядка $-\infty$.

Доказательство. Пусть функция $\theta_0(\xi)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta_0(\xi) \leq 1$ и $\theta_0(\xi) = 1$ при $|\xi| \leq h$. Положим

$$\theta_0(D) = F^{-1}\theta_0(\xi)F, \quad T = A\theta_0(D), \quad v = [I-\theta_0(D)]u.$$

Мы имеем

$$[1-\theta_0(\xi)]^2/[1+|\xi|^2] \leq (1+h^2)^{-1}.$$

Поэтому

$$\|(A-T)u\|_{s-m} = \|Av\|_{s-m} \leq C_1\|v\|_s + C_2\|v\|_{s-1} \leq (C_1 + C_2(1+h^2)^{-1/2})\|u\|_s.$$

Здесь переход от v к u возможен в силу связи образов Фурье этих функций и свойств функции $\theta_0(\xi)$. Остается учесть, что h можно взять сколь угодно большим. □

§3. Эллиптические ПДО в $\mathbb{R}^n$

Теорема 1. *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такой равномерно эллиптический ПДО B из $\Psi^{-m}_{ph}(\mathbb{R}^n)$, что*

$$BA = I + T_1, \quad AB = I + T_2, \tag{1}$$

где T_j – ПДО порядка $-\infty$. Главные символы ПДО a_0 и b_0 связаны формулой $b_0 = 1/a_0$.

Оператор B называется *двусторонним параметриксом*, или просто *параметриксом* для A.

Доказательство теоремы. Пусть символ a ПДО A имеет асимптотическое разложение

$$a \approx a_0 + a_1 + \ldots. \tag{2}$$

Будем строить асимптотическое разложение символа b ПДО B

$$b \approx b_0 + b_1 + \ldots, \tag{3}$$

исходя из первого из соотношений (1). В силу теоремы о композиции мы должны иметь

$$\begin{gathered} b_0 a_0 = 1, \\ b_1 a_0 + b_0 a_1 + \sum \partial_{\xi_j} b_0 \cdot D_{x_j} a_0 = 0, \\ b_2 a_0 + b_1 a_1 + \cdots = 0 \end{gathered}$$

и т. д. Отсюда последовательно определяем

$$\begin{gathered} b_0 = a_0^{-1} \in S_h^{-m}, \\ b_1 = a_0^{-1}[-b_0 a_1 - \sum \partial_{\xi_j} b_0 \cdot D_{x_j} a_0] \in S_h^{-m-1}, \\ b_2 = a_0^{-1}[-b_1 a_1 + \ldots] \in S_h^{-m-2} \end{gathered}$$

и т. д. При вычислении каждого b_j используется то обстоятельство, что предыдущие члены в разложении символа b уже определены. По асимптотическому разложению (3) строится символ b, чем определяется полиоднородный ПДО B_1 с точностью до слагаемого из $\Psi^{-\infty}$. ПДО $B = B_1$ принадлежит Ψ_{ph}^{-m}. Мы построили этот ПДО так, что $B_1 A = I + T_1$, где T_1 – ПДО порядка $-\infty$. Такой ПДО B_1 называется *левым параметриксом* для A.

Аналогично строится *правый параметрикс* B_2 – такой ПДО из Ψ_{ph}^{-m}, что $AB_2 = I + T_3$, где T_3 – ПДО из $\Psi^{-\infty}$. Теперь имеем

$$B_1 A B_2 = (I + T_1) B_2 = B_1 (I + T_3).$$

Из последнего равенства видно, что $B_1 - B_2 \in \Psi^{-\infty}$, так что оба ПДО B_1 и B_2 являются двусторонними параметриксами для A. $\Box$

Теорема 1 имеет важные следствия.

Теорема 2 (о повышении гладкости решений эллиптических уравнений). *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из Ψ_{ph}^m и $Au = f$ в $\mathbb{R}^n$, где $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, а $f \in H^{s-m+t}(\mathbb{R}^n)$ с положительным t. Тогда $u \in H^{s+t}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Используя параметрикс B, имеем $BAu = Bf$, откуда

$$u = -T_1 u + Bf \in H^{s+t}(\mathbb{R}^n),$$

так как $T_1 u \in H^\infty(\mathbb{R}^n) = \cap H^r(\mathbb{R}^n)$. $\Box$

Этому утверждению мы в следующей лекции придадим локальную форму.

Теорема 3 (об априорной оценке). *Пусть A – равномерно эллиптический ПДО из Ψ_{ph}^m. Тогда*

$$\|u\|_s \le C(\|Au\|_{s-m} + \|u\|_{s-1}) \quad (u \in H_m(\mathbb{R}^n)). \tag{4}$$

Доказательство. Используя параметрикс, из соотношения $Au = f$ опять получаем

$$u = -T_1 u + Bf,$$

откуда

$$\|u\|_s \le \|T_1 u\|_s + \|Bf\|_s$$

и как следствие

$$\|u\|_s \le C_1 \|f\|_{s-m} + C_2 \|u\|_{s-1}. \quad \Box$$

Отметим, что в последнем слагаемом норму $\|u\|_{s-1}$ можно заменить нормой любого порядка, меньшего s.