ЛЕКЦИЯ 8

Приведем локальный вариант теоремы о повышении гладкости решений. Но для простоты ограничимся случаем повышения гладкости "до бесконечности".

Теорема 4. *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$, $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ и $Au \in C^\infty(\Omega)$, где Ω – некоторая область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать область Ω шаром. Пусть Ω_0 – концентрический шар меньшего радиуса. Достаточно показать, что $u \in C^\infty(\Omega_0)$ (после возможного исправления на множестве нулевой меры).

Построим последовательность функций φ_k с сужающимися носителями ($k = 1, 2, \dots$) так, что

$$\varphi_k = 1 \ \text{ в окрестности носителя } \ \operatorname{supp} \varphi_{k+1} \ \text{ и } \ \overline{\Omega} \supset \operatorname{supp} \varphi_k \supset \overline{\Omega}_0.$$

В частности, все φ_k равны 1 на Ω_0.

Заметим, что

$$\varphi_{k+1} A \varphi_k u = \varphi_{k+1} A u - \varphi_{k+1} A (1 - \varphi_k) u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

так как в первом члене справа $Au \in C^\infty$ на $\operatorname{supp} \varphi_{k+1}$, а во втором члене $\varphi_{k+1} A (1 - \varphi_k) \cdot \in \Psi^{-\infty}$.

Теперь проводим следующую индукцию. Имеем

$$\varphi_2 A \varphi_1 u = (\varphi_2 A - A \varphi_2)(\varphi_1 u) + A(\varphi_2 u). \tag{5}$$

Здесь справа $\varphi_2 A - A\varphi_2 \in \Psi^{m-1}$ и $\varphi_1 u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, так что первое слагаемое справа принадлежит $H^{s-m+1}(\mathbb{R}^n)$. Так как левая часть принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то по теореме 2 заключаем, что $\varphi_2 u \in H^{s+1}(\mathbb{R}^n)$.

Далее, из соотношения

$$\varphi_3 A \varphi_2 u = (\varphi_3 A - A \varphi_3)(\varphi_2 u) + A(\varphi_3 u) \tag{6}$$

аналогично заключаем, что $\varphi_3 u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$, и т. д. В итоге $u \in H^\infty(\Omega_0)$. $\square$

Заметим, что эллиптичность достаточно предполагать в Ω, так как из шара Ω_0 эллиптический в Ω главный символ ($a_0(x, \xi) \neq 0$ при $x \in \Omega$) можно продолжить до главного символа, равномерно эллиптического в $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Если $Au = f$ и A равномерно эллиптичен, то*

$$\operatorname{sing\,supp} u \subset \operatorname{sing\,supp} Au \tag{7}$$

и, значит,

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} Au, \tag{8}$$

поскольку обратное к (7) включение справедливо всегда.

Теперь мы покажем, что из априорной оценки (см. теорему 3) следует эллиптичность.

Теорема 5. *Пусть* $A \in \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$ *и*

$$\|u\|_s \le C(\|Au\|_{s-m} + \|u\|_{m-1}) \tag{9}$$

для функций u из $H^s(\mathbb{R}^n)$ при некотором s с носителями в некоторой окрестности $O = O(x_0)$ точки x_0, где C не зависит от u. Тогда главный символ $a_0(x,\xi)$ эллиптичен в точке x_0:

$$a_0(x_0,\xi) \ne 0 \quad (\xi \ne 0). \tag{10}$$

Доказательство. Предположим, что $a_0(x_0,\xi_0) = 0$ при некотором $\xi_0 \ne 0$. Применим оценку (9) к функциям

$$u(x) = \varphi(x)e^{i\tau x\cdot\xi_0}, \quad \tau > 0,$$

где

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|\varphi\|_0 = 1, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset O.$$

Имеем

$$\|u\|_s = \|\Lambda^s u\|_0 = \|\Lambda^s(\varphi\cdot)(e^{i\tau x\cdot\xi_0})\|.$$

Пусть $b(x,\xi)$ – символ произведения $\Lambda^s(\varphi\cdot)$. Тогда по известной нам формуле для символа под знаком последней нормы стоит $b(x,\tau\xi_0)e^{i\tau x\cdot\xi_0}$. При этом

$$b(x,\xi) \approx \sum \frac{1}{\alpha! i^{|\alpha|}}\partial_\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^{s/2}\cdot\partial_x^\alpha\varphi(x),$$

так что

$$b(x,\tau\xi_0) = \tau^s|\xi_0|^s\varphi(x) + O(\tau^{s-1}) \quad (\tau \to \infty). \tag{11}$$

Аналогично

$$\|Au\|_{s-m} = \|\Lambda^{s-m}Au\|_0,$$

и под знаком последней нормы стоит $c(x,\tau\xi_0)e^{i\tau x\cdot\xi}$, где $c(x,\xi)$ – символ оператора $\Lambda^{s-m}A(\varphi\cdot)$. Для него имеем

$$c(x,\tau\xi_0) = e^{i\tau x\cdot\xi_0}\tau^s|\xi_0|^{s-m}a_0(x,\xi_0)\varphi(x) + O(\tau^{s-1}).$$

Теперь оценка (9) дает

$$\tau^s|\xi_0|^s \le C\tau^s|\xi_0|^{s-m}\max_{x\in\operatorname{supp}\varphi}|a_0(x,\xi_0)| + O(\tau^{s-1}). \tag{12 M}$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi$ настолько мал, что на нем $C\max|a_0(x,\xi_0/|\xi_0|)| < 1$. Тогда при достаточно большом τ возникает противоречие. □

§4. Псевдодифференциальные операторы на замкнутых многообразиях

1. Гладкое замкнутое многообразие. Рассмотрим n-мерное замкнутое многообразие M класса C^∞. Например, это может быть замкнутая бесконечно гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Не вдаваясь в совсем точное определение, напомним, что M – "достаточно хорошее" топологическое пространство, покрытое координатными окрестностями O. Каждая такая окрестность имеет карту – область U в $\mathbb{R}^n$ со взаимно однозначным отображением $x = \kappa(y)$ области U на O. Координаты y в U являются локальными координатами в O. Если координатные окрестности O_1 и O_2 пересекаются, то их прообразы на картах U_1 и U_2 – открытые множества и связывающее их отображение $\kappa_1^{-1}\kappa_2$ является бесконечно гладким диффеоморфизмом. Карты координатных окрестностей образуют атлас многообразия. Замкнутость многообразия означает его компактность (и отсутствие края). Компактность – это возможность выбрать из любого покрытия многообразия M открытыми множествами (в частности, координатными окрестностями) конечное подпокрытие. Эквивалентное условие состоит в том, что любая последовательность точек на M содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой его точке.

Замкнутая гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ как правило задается параметрически с разной (гладкой) параметризацией в разных местах, параметры – это и есть локальные координаты. Более общий пример замкнутого гладкого n-мерного многообразия (фактически самый общий) – замкнутая гладкая поверхность размерности n в $\mathbb{R}^N$, $N > n$.

Функция $f(x)$ на M называется бесконечно гладкой, если все функции $f(\kappa(y))$ на картах координатных окрестностей бесконечно гладкие. Эти функции образуют *пространство* $C^\infty(M) = \mathcal{E}(M)$. Аналогично определяются функции класса $C^N(M)$ с конечным $N \in \mathbb{Z}_+$. Частные производные определены локально в локальных координатах и зависят от их выбора. Как правило дифференциальный оператор на M нельзя определить сразу глобально.

Для каждого покрытия $\{O_k\}_k^K$ координатными окрестностями (или любыми открытыми множествами) существует подчиненное этому покрытию *разбиение единицы* – система функций $\{\varphi_k\}_1^K$ со свойствами

$$\varphi_k \in C^\infty(M), \quad \varphi_k \geq 0, \quad \operatorname{supp}\varphi_k \subset O_k, \quad \sum_1^K \varphi_k(x) \equiv 1. \tag{1}$$

В пространстве $C^N(M)$ можно ввести норму

$$||f||_N = \max_{k;y\in U_k;\alpha|\leq N} |\partial_y^\alpha (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]|. \tag{2}$$

Эта норма зависит от выбора разбиения единицы и локальных координат, но можно проверить, что при разных выборах получаются эквивалентные нормы. (Эквивалентность двух норм означает, что их отношение заключено между положительными постоянными.)

Пространство $\mathcal{E}'(M)$ определяется как пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$.

Обсудим теперь вопрос об интегрировании по M. Определим *плотность* на M как совокупность бесконечно гладких положительных функций $\rho_U(y)$ на картах U, таких, что если координатные окрестности O и O' имеют непустое пересечение, то для точек на картах U и U', соответствующих точкам этого пересечения,

$$\rho_U(y)\,dy = \rho_{U'}(y')\,dy'. \tag{3}$$

Это означает, что

$$\rho_U[y(y')] = \rho_{U'}(y')\left|\det\frac{\partial y(y')}{\partial y'}\right|^{-1}. \tag{4}$$

Обычно плотность записывают так: $dx = \{\rho_U(y)\,dy\}$.

Теперь определим *интеграл* от функции $f(x)$ по M формулой

$$\int_M f(x)\,dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]\rho_{U_k}(y)\,dy. \tag{5}$$

Здесь использованы разбиение единицы, состоящее из функций φ_k с носителями в координатных окрестностях O_k, плотность и локальные координаты в $U^{(k)}$. Но интеграл благодаря (4) зависит только от выбора плотности. Если, в частности, носитель функции f лежит в координатной окрестности O, то

$$\int_M f(x)\,dx = \int f(\kappa(y))\rho(y)\,dy. \tag{6}$$

Каждую непрерывную функцию $f(x)$ на M можно теперь отождествить с распределением, или обобщенной функцией, из $\mathcal{E}'(M)$ по формуле

$$\langle f,\varphi\rangle = \int_M f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi\in\mathcal{E}(M). \tag{7}$$

Скалярное произведение на M определяется формулой

$$(f,g)_{0,M} = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx. \tag{8}$$

Далее естественно определяется *пространство* $L_2(M)$ как гильбертово пространство, получаемое, например, пополнением пространства $C(M)$ непрерывных функций по соответствующей норме $\|u\|_{0,M} = (u,u)_{0,M}^{1/2}$. Можно определить и другие пространства $L_p(M)$, $1\le p\le\infty$.

Пример. Рассмотрим двумерную замкнутую поверхность S в $\mathbb{R}^3$. Пусть она локально задается уравнениями

$$x_j = x_j(t_1,t_2) \quad (j=1,2,3), \tag{9}$$

где функции справа бесконечно гладкие. Здесь t_1, t_2 – локальные координаты. Лебегова мера в $\mathbb{R}^3$ порождает лебегову меру на S, и “интеграл 1-го рода” по этой мере (“по площади на S”) вычисляется по известной формуле

$$\int f(x)\,dS = \iint f(x_1(t_1,t_2),\dots)\sqrt{EG-F^2}\,dt_1\,dt_2, \tag{10}$$

где
$$E = \partial_{t_1} x \cdot \partial_{t_1} x, \quad F = \partial_{t_1} x \cdot \partial_{t_2} x, \quad G = \partial_{t_2} x \cdot \partial_{t_2} x. \tag{11}$$
При этом, как известно, величина $\sqrt{EG - F^2}$, зависящая от выбора параметризации, выражается через якобианы следующим образом:
$$\sqrt{EG - F^2} = \left[\left| \det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right|^2 + \ldots \right]^{1/2}.$$
В данном случае плотность есть $\{\sqrt{EG - F^2}\, dt_1\, dt_2\}$.

Замечание. При заданной плотности каждая точка на M имеет окрестность с такими локальными координатами y, что $\rho_U(y) \equiv 1$.

Действительно, пусть O – какая-нибудь координатная окрестность, в которой находится взятая точка, и $\widetilde{y}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ – локальные координаты в ней, $\widetilde{U}$ – соответствующая карта. Положим
$$y_1 = \widetilde{y}_1, \ldots, y_{n-1} = \widetilde{y}_{n-1}, \quad y_n = \int_{\widetilde{y}_{n,0}}^{\widetilde{y}_n} \rho_{\widetilde{U}}(\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{n-1}, t)\, dt. \tag{12}$$
Тогда $\partial y / \partial \widetilde{y}$ – нижняя треугольная матрица с главной диагональю $(1, \ldots, 1, \rho_{\widetilde{U}})$ и
$$dy = \left| \det(\partial y / \partial \widetilde{y}) \right| d\widetilde{y} = \rho_{\widetilde{U}}(\widetilde{y})\, d\widetilde{y},$$
так что $\rho_U(y)$ действительно равно 1.

Покрывая многообразие окрестностями с такими локальными координатами и выбирая конечное подпокрытие, получаем *специальный "малый" атлас из карт, согласованных с заданной плотностью так, что все ρ_U тождественно равны* 1. Формула (5) для интеграла при использовании этих карт принимает вид
$$\int_M f(x)\, dx = \sum_1^K \int (f\varphi_k)[\kappa^{(k)}(y)]\, dy. \tag{5'}$$

Соболевские пространства $H^s(M)$ вводятся следующим образом. Пусть $\{O_k\}$ – покрытие многообразия координатными окрестностями, и пусть $\{\psi_k\}_1^K$ – система функций со следующими свойствами:
$$\psi_k \in C^\infty(M), \quad \psi_k \geq 0, \quad \operatorname{supp} \psi_k \subset O_k, \quad \sum \psi_k > 0 \ \text{ на } \ M. \tag{13}$$
Для любого $s \in \mathbb{R}$ и любой функции $u \in C^\infty(M)$ положим
$$\|u\|_{s,M} = \left[\sum \|u\psi_k\|^2_{s,\mathbb{R}^n} \right]^{1/2}, \tag{14}$$
где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена с соответствующей карты на $\mathbb{R}^n$ нулем вне ее носителя и норма вычислена в $\mathbb{R}^n$. Пространство $H^s(M)$ определяется как пополнение пространства $C^\infty(M)$ по этой норме.

Очевидно, что это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{s,M} = \sum (u\psi_k, v\psi_k)_{s,\mathbb{R}^n}. \tag{15}$$

Разные выборы координатных окрестностей, локальных координат и системы функций ψ_k приводят к эквивалентным нормам. Эта система может быть, в частности, разбиением единицы:

$$\sum \psi_k(x) \equiv 1. \tag{16}$$

Другой полезный выбор этой системы: с условием

$$\sum \psi_k^2(x) \equiv 1. \tag{17}$$

В последнем случае, если пользоваться малым атласом из карт, согласованных с заданной плотностью,

$$(u, v)_{0,M} = \int_M u\overline{v}\, dx, \tag{18}$$

так что $H^0(M)$ полностью совпадает с $L_2(M)$.

Имеет место непрерывное вложение $H_s(M) \supset H_{s'}(M)$ при $s < s'$; более того, это вложение компактно (благодаря компактности M). При $s > n/2 + k$ имеем непрерывное вложение $H^s(M) \subset C^{(k)}(M)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому $H^\infty(M) = \cap H^s(M)$ можно отождествить с $C^\infty(M)$. Пространство $[H^s(M)]'$ непрерывных линейных функционалов над $H^s(M)$ можно отождествить 1) с $H^s(M)$, используя скалярное произведение (15), 2) с $H^{-s}(M)$, используя продолжение формы $(u, v)_{0,M}$ на $H^s(M) \times H^{-s}(M)$. Но этот второй вариант удастся обосновать только позднее. См. лекцию 11.

Некоторые подробности можно найти в лекциях предыдущего семестра.