Лекция 9

2. Определение ПДО на многообразии. Пусть M – замкнутое n-мерное бесконечно гладкое многообразие, и пусть A – оператор, действующий в $C^\infty(M)$. Через φ и ψ будем обозначать функции из $C^\infty(M)$.

Мы скажем, что A – ПДО из $\Psi^m(M)$, если выполнены два условия.

1. Для любых φ, ψ с не пересекающимися носителями $\varphi A(\psi\cdot)$ продолжается до оператора порядка $-\infty$ в соболевской шкале на M.

2. Если носители функций φ, ψ лежат в одной координатной окрестности O, то

$$\varphi A \psi u = \varphi A_U \psi u, \tag{19}$$

где A_U – ПДО из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, зависящий только от O и выбора локальных координат в O.

Здесь и дальше подразумевается следующее. Слева u – любая функция из $C^\infty(M)$. Носители функций ψu лежат в O. После перехода к локальным координатам получаются функции на карте U, равные нулю вблизи границы карты. Они продолжаются на $\mathbb{R}^n$ нулем вне своих носителей. В правой части формулы (19) получается функция на $\mathbb{R}^n$ с носителем в U. Она переносится на O и продолжается нулем на M вне своего носителя.

В подтексте этого определения – теорема о том, что в $\mathbb{R}^n$ композиция вида $\varphi A(\psi\cdot)$, где A – ПДО, а φ и ψ – функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с не пересекающимися носителями, есть ПДО порядка $-\infty$, а главное, теорема о замене переменных в ПДО. В силу этих теорем только что данное определение ПДО на M корректно.

Выведем теперь формулу для представления ПДО A на M. Пусть $\{O_k\}_1^K$ – покрытие многообразия координатными окрестностями, а $\{\varphi_k\}_1^K$ – разбиение единицы, состоящее из бесконечно гладких функций и подчиненное этому покрытию. Пусть $A_k = A_{U_k}$ – ПДО из второго пункта определения, отвечающие O_k. Пусть ψ_k – функции из $C^\infty(M)$ с носителями в O_k, равные 1 в окрестности носителя функции φ_k. Тогда

$$A = \sum \varphi_k A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \sum \varphi_k A(1-\psi_k)\cdot$$

Последняя сумма – оператор порядка $-\infty$. Таким образом,

$$A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \dots, \tag{20}$$

здесь и дальше многоточием обозначается оператор порядка $-\infty$. Аналогичную формулу можно получить, умножая A на разбиение единицы справа:

$$A = \sum \psi_k A_k \varphi_k \cdot + \dots. \tag{21}$$

Из этих формул сразу следует

Теорема 1. *ПДО из $\Psi^m(M)$ действует ограниченным образом из $H^s(M)$ в $H^{s-m}(M)$.*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Действительно, достаточно воспользоваться аналогичным результатом для ПДО в $\mathbb{R}^n$.

Заметим еще, что любой оператор вида (20) или (21) – ПДО из $\Psi_m(M)$. Это следует из теоремы о замене переменных в ПДО.

Через $\Psi^{-\infty}(M)$ обозначим пересечение всех $\Psi^m(M)$ и через $\Psi^\infty(M)$ – объединение всех $\Psi^m(M)$. Заметим, что $\Psi^{-\infty}(M)$ совпадает с классом интегральных операторов

$$\int k(x,y)u(x)\,dx$$

с бесконечно гладкими ядрами. Можно показать, что он же совпадает с классом операторов порядка $-\infty$ в соболевской шкале M.

Полный символ ПДО как правило можно рассматривать только локально, в локальных координатах.

ПДО A из $\Psi^m(M)$ назовем *полиоднородным*, если все A_k – полиоднородные ПДО. Эти ПДО образуют класс $\Psi^m_{ph}(M)$.

Примерами могут служить операторы в частных производных с бесконечно гладкими коэффициентами (их запись обычно локальна и зависит от выбора локальных координат) и оператор умножения на бесконечно гладкую функцию, это ПДО из $\Psi^0_{ph}(M)$.

Будет показано, что полиоднородный ПДО имеет инвариантно определенный главный символ. Подготовка проводится в следующем пункте.

3. Касательное и кокасательное расслоения над M. Пусть U – область в $\mathbb{R}^n$ и в каждой ее точке y задан числовой столбец $\sigma(y)$ высоты n. Говорят, что это *контравариантный вектор* (точнее, поле контравариантных векторов), если при преобразовании координат $y \mapsto \widetilde{y} = \widetilde{y}(y)$ эти векторы преобразуются по правилу

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\partial \widetilde{y}(y)}{\partial y}\sigma. \tag{22}$$

Это преобразование имитирует линейную часть преобразования $y - y_0$ в $\widetilde{y} - \widetilde{y}_0$:

$$\widetilde{y} - \widetilde{y}_0 = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}(y - y_0) + \dots .$$

Поля контравариантных векторов образуют линейное пространство с инвариантно определенными (не зависящими от выбора координат) линейными операциями.

Если в U задана кривая $y = y(t)$, то касательные к ней векторы $dy(t)/dt$ контравариантны. Действительно, при переходе к координатам $\widetilde{y}$ уравнения кривой принимают вид $\widetilde{y} = \widetilde{y}(y(t))$, и

$$\frac{d\widetilde{y}}{dt} = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Контравариантные векторы называются также тензорами типа $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Теперь вспомним понятие поля *ковариантных векторов*, или *ковекторов*, или *тензоров порядка* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Это тоже вектор η высоты n, при этом требуется, чтобы стандартное скалярное произведение $\eta \cdot \sigma$ не зависело от выбора координат. Поэтому из равенства

$$\widetilde{\eta} \cdot \widetilde{\sigma} = \widetilde{\eta} \cdot \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}\, \sigma$$

следует правило преобразования координат ковектора

$$\widetilde{\eta} = \left(\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \right)^{\prime -1} \eta. \tag{23}$$

Перейдем к понятиям касательной плоскости и касательного расслоения. Фиксируя точку x на M, рассмотрим пары (x, τ), где τ – контравариантные векторы, “ выходящие из” x. Эти пары образуют *касательную плоскость* $T_x M$. Если M – гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, то это обычная касательная плоскость, состоящая из выходящих из x векторов, касательных к проходящим через x гладким кривым на M. Объединение

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \tag{24}$$

называется *касательным расслоением* многообразия M. Здесь касательные плоскости $T_x M$ и $T_{\hat{x}} M$ в разных точках x и $\hat{x}$ считаются не имеющими общих точек. Это бесконечно гладкое некомпактное многообразие с координатными окрестностями $O \times \mathbb{R}^n$ и преобразованиями локальных координат

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}(y), \quad \widetilde{\sigma} = \frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y}\, \sigma. \tag{25}$$

Кокасательная плоскость $T_x^* M$ состоит из пар (x, ξ), где ξ – ковекторы. Объединение

$$T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M \tag{26}$$

называется *кокасательным расслоением* многообразия M. Это бесконечно гладкое некомпактное многообразие с координатными окрестностями $O \times \mathbb{R}^n$ и преобразованиями координат

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}(y), \quad \widetilde{\eta} = \left(\frac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} \right)^{\prime -1} \eta. \tag{27}$$

4. Главный символ ПДО на многообразии. Вспомним, что при преобразовании координат – подстановке $\widetilde{y} = \widetilde{y}(y)$ главный символ ПДО преобразуется по формуле

$$\widetilde{a}_0 \left(\widetilde{y}(y), \left(\frac{\partial \widetilde{y}(y)}{\partial y} \right)^{\prime -1} \eta \right) = a_0(y, \eta).$$

Отсюда следует, что главный символ $a_0(x,\xi)$ ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$ имеет инвариантный смысл как функция на кокасательном расслоении T^*M, точнее, на $T^*M\setminus 0$ (из T^*M выбрасывается "нулевое сечение", состоящее из ковекторов $(x,0)$). Это положительно однородная по ξ функция степени m. Это означает, что "представители" $a_0(y,\eta)$ главного символа в локальных координатах положительно однородны степени m по η.

В частности, имеет смысл условие *эллиптичности*

$$a_0(x,\xi)\neq 0 \quad (\xi\neq 0). \tag{28}$$

Уже следующий член a_1 полного разложения символа не имеет инвариантного смысла. Но можно доказать, что так называемый *субглавный символ*

$$(\operatorname{sub} A)=a_1(x,\xi)-\frac{1}{2i}\sum \partial_{\xi_j}\partial_{x_j}a_0(x,\xi) \tag{29}$$

имеет инвариантный смысл, если договориться пользоваться только локальными координатами, согласованными с данной плотностью (все функции ρ_U равны единице).

Отметим еще, что на окружности S (длины 2π) естественно пользоваться периодической координатой. В этом случае полный символ имеет смысл как 2π-периодическая функция от x:

$$a(x+2\pi,\xi)=a(x,\xi). \tag{30}$$

Аналогично обстоит дело на торе $\mathbb{T}^n=S\times\cdots\times S$ – прямом произведении n окружностей.

5. Исчисление ПДО на многообразии. Все теоремы следуют из аналогичных теорем в $\mathbb{R}^n$, но проследить удается только за главными символами.

Теорема 1. *Пусть $A\in\Psi^{m_1}(M)$, $B\in\Psi^{m_2}(M)$. Тогда $C=BA\in\Psi^{m_1+m_2}(M)$. При этом если A и B полиоднородны, то C полиоднороден и его главный символ есть произведение главных символов ПДО B и A*:

$$c_0=b_0a_0. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть φ, ψ – две функции из $C^\infty(M)$ сначала с не пересекающимися носителями. Пусть функция χ из $C^\infty(M)$, равная 1 в окрестности носителя функции φ и такая, что носители функций χ и ψ не пересекаются. Тогда

$$\varphi BA\psi\cdot=\varphi B\chi A\psi\cdot+\varphi B(1-\chi)A\psi\cdot$$

Оба слагаемых справа принадлежат $\Psi^{-\infty}(M)$.

Пусть теперь носители обеих функций φ, ψ лежат в одной координатной окрестности, и пусть χ – функция из $C^\infty(M)$ с носителем в O, равная 1 в окрестности объединения носителей функций φ и ψ. Имеем

$$\varphi BA\psi\cdot=\varphi B\chi\chi A\psi\cdot+\varphi B(1-\chi^2)A\psi\cdot.$$

В первом слагаемом мы можем подставить вместо A и B соответствующие ПДО в $\mathbb{R}^n$, второе слагаемое принадлежит $\Psi^{-\infty}(M)$. Отсюда видно, что BA – ПДО из $\Psi^{m_1+m_2}(M)$, полиоднородный в случае полиоднородных A и B. Для проверки утверждения о главных символах достаточно предположить все три функции равными 1 в окрестности фиксированной точки. $\square$

Пусть на многообразии зафиксирована (положительная бесконечно гладкая) плотность. Тогда определены скалярное произведение

$$(u,v)_0 = (u,v)_{0,M} = \int_M u\overline{v}\,dx$$

и форма

$$\langle u,v\rangle_0 = \langle u,v\rangle_{0,M} = \int_M uv\,dx, \tag{32}$$

и для каждого оператора A, действующего в $C^\infty(M)$, определены формально сопряженный оператор $A^{(*)}$ и формально транспонированный оператор $A^{(\prime)}$ соответственно формулами

$$(Au,v)_0 = (u, A^{(*)}v)_0 \ \text{ и } \ \langle Au,v\rangle_0 = \langle u, A^{(\prime)}v\rangle. \tag{33}$$

Теорема 2. *Пусть A – ПДО из $\Psi^m(M)$. Тогда $A^{(*)}$ и $A^{(\prime)}$ – тоже ПДО из $\Psi^m(M)$. Если A полиоднороден, то $A^{(*)}$ и $A^{(\prime)}$ тоже полиоднородны и их главные символы равны соответственно $\overline{a_0(x,\xi)}$ и $a_0(x,-\xi)$, где $a_0(x,\xi)$ – главный символ ПДО A.*

Доказательство. Проще всего воспользоваться малым атласом из окрестностей с локальными координатами, согласованными с заданной плотностью, и формулой (20):

$$A = \sum \varphi_k A_k \psi_k \cdot + \ldots,$$

здесь и дальше многоточием обозначен бесконечно сглаживающий оператор. Имеем

$$A^{(*)} = \sum \psi_k A_k^{(*)} \varphi_k, \quad A^{(\prime)} = \sum \psi_k A_k^{(\prime)} \varphi_k,$$

и т.д.

§5. Эллиптические ПДО на замкнутом многообразии

1 . Параметрикс для эллиптического ПДО.

Теорема 3. *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда существует такой эллиптический ПДО B из $\Psi^{-m}_{ph}(M)$, что*

$$BA = I + \ldots \ \text{ и } \ AB = I + \ldots. \tag{1}$$

Главный символ b_0 ПДО B равен $1/a_0$, где a_0 – главный символ ПДО A.

Доказательство. Нам понадобятся два покрытия $\{O_k\}_1^N$ и $\{\widetilde{O}_k\}_1^N$ многообразия M со следующим свойством: если пересечение $O_k \cap O_l$ непусто, то объединение $O_k \cup O_l$ содержится в пересечении $\widetilde{O}_k \cap \widetilde{O}_l$.

Для каждого k найдем такой ПДО $A_k \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$, что для функций φ, ψ из $C^\infty(M)$ с носителями в $\widetilde{O}_k$

$$\varphi A\psi\cdot = \varphi A_k\psi\cdot$$

в соответствующих локальных координатах. Операторы A_k можно предположить равномерно эллиптическими. Заметим, что если носители функций φ, ψ лежат в $\widetilde{O}_k \cap \widetilde{O}_l$, то

$$\varphi A_k\psi\cdot = \varphi A_l\varphi\cdot\,. \tag{2}$$

Здесь слева и справа используются разные системы локальных координат. Теперь зафиксируем конечное разбиение единицы $\sum\varphi_k$, подчиненное покрытию $\{O_k\}$, и предположим, что носитель функции ψ_k лежит в O_k и что $\psi_k = 1$ в окрестности носителя функции φ_k. Мы имеем

$$A = \sum\psi_k A_k\varphi_k\cdot + \dots.$$

Пусть B_k –эллиптический параметрикс для A_k. Положим

$$B = \sum\varphi_l B_l\psi_l\cdot \tag{3}$$

и покажем, что это левый параметрикс для A. Имеем

$$BA = \sum\sum\varphi_l B_l\psi_l\psi_k A_k\varphi_k\cdot\,.$$

Здесь в каждом слагаемом или $\varphi_l\varphi_k$ – тождественный нуль. или объединение носителей функций ψ_k и ψ_l лежит в $\widetilde{O}_k \cap \widetilde{O}_l$. В последнем случае можно заменить A_k на A_l и переписать соответствующее слагаемое, используя (2), в виде

$$\varphi_l B_l\psi_l\psi_k A_l\varphi_k = \varphi_l B_l(1-\psi_l+\psi_l)(1-\psi_k+\psi_k)A_l\varphi_k+\dots = \varphi_l A_l B_l\varphi_k+\dots = \varphi_l\varphi_k+\dots.$$

Суммируя по k и l, получаем единичный оператор плюс бесконечно сглаживающий.

Далее, как в $\mathbb{R}^n$, строим правый параметрикс и проверяем, что оба являются двусторонними параметриксами. □

2. Следствия.

Теорема 4 (об априорной оценке). *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u\|_{s,M} \le C_s(\|Au\|_{s-m,M} + \|u\|_{s-1,M}). \tag{4}$$

Теорема 5 (о повышении гладкости решений). *Пусть A – эллиптический ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$. Тогда если $u \in H^s(M)$, $Au \in H^{s-m+t}(M)$, где $t > 0$, то $u \in H^{s+t}(M)$.*