ЗАДАЧИ

1. Пусть L – решётка полного ранга в $\mathbb{C}$. Докажите, что $\mathbb{C}/L$ – комплексное многообразие.

2. На любой замкнутой поверхности рода g имеется комплексная структура. Доказать.

3. Пусть W связное открытое подмножество римановой поверхности X, и f голоморфная в W функция. Если существует такая точка $p \in W$, что $|f(x)| \leq |f(p)|$ для всех $x \in W$, то f константа на W.

4. Доказать, что у непостоянной мероморфной функции на римановой поверхности "столько нулей, сколько полюсов".

5. Непостоянное голоморфное отображение римановых поверхностей открыто, а прообраз любой точки дискретен. Доказать.

6. Пусть $f: X \to Y$ непостоянное голоморфное отображение, причем риманова поверхность X замкнута. Тогда Y замкнута, а f есть отображение на.

7. Используя локальную классификацию голоморфных отображений $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, доказать, что непостоянное голоморфное отображение $f: X \to Y$ замкнутых римановых поверхностей является разветвленным накрытием. Сумма индексов ветвления над произвольной точкой равна степени отображения.

8. Уточнить и объяснить смысл следующего важного лозунга: мероморфная функция на римановой поверхности X – это то же самое, что голоморфное отображение $X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \hat{\mathbb{C}}$ (сфера Римана).

9. Нули тэта-функции расположены в точках $\left(\frac{1+\tau}{2}\right) + m + n\tau$, $m, n \in \mathbb{Z}$ и все они простые.

10. Пусть $L \subseteq L'$ две решетки в $\mathbb{C}$. Тогда естественное отображение из $\mathbb{C}/L$ в $\mathbb{C}/L'$ голоморфно и является накрытием.

11. Покажите, что любой тор $\mathbb{C}/L$ изоморфен тору вида $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$.

12. Рассмотрим плоские кривые X

$$y^2 = x^3 + 1$$
$$y^2 = x^6 - 1$$
$$y + x^3 + xy^3 = 0$$

Докажите, что

а) эти кривые гладкие.

б) первая кривая "пополняется" одной точкой до замкнутой римановой поверхности $\bar{X}$, а вторая и третья - двумя точками.

в) вычислите эйлерову характеристику X во всех трех случаях.

г) найдите (для всех трех случаев) дивизор нулей и полюсов мероморфных функций x и y на $\bar{X}$.