20.11.03

Римановы поверхности и ...

Ещё семь задач

1. Вычислите род кривой, заданной в $\mathbb{C}P^3$ как пересечение квадрики $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ и кубики $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0$.

2. Если $f{:}X \to Y$ - непостоянное голоморфное отображение римановой поверхности X в риманову поверхность Y, то $g(X) \geq g(Y)$. Доказать.

3. Рассмотрим гиперэллиптическую кривую $C{:}y^2 = (x - p_1) \ldots \cdot (x - p_{2g+2})$ и её гиперэллиптическую инволюцию $\tau(y, x) = (-y, x)$. Докажите, что любой автоморфизм C коммутирует с τ. Выведите отсюда, что группа $AutC$ конечна при $g \geq 2$. Оцените её порядок.

4. Пусть X - риманова поверхность рода g, $\varphi \in AutX$. Докажите, что $|Fix\varphi| \leq 2g + 2$ (Указание: пусть $p_1, \ldots, p_{g+1}$ - точки общего положения на X. Покажите, что существует мероморфная функция с дивизором полюсов $div(f)_\infty = p_1 + \ldots + p_{g+1}$. Далее рассмотрите функцию $f - \varphi^*(f)$).

5. Примените теорему Лефшеца о неподвижной точке для доказательства следующего факта: если $\varphi \in AutX$ и автоморфизм φ действует тривиально на $H^1(X, \mathbb{Z})$, то $\varphi = id$.

6. Если $\varphi \in AutX$, то индуцированный автоморфизм $\hat{\varphi}{:}H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Z})$ является одновременно целочисленным и унитарным в $H^1(X, \mathbb{C})$ относительно эрмитовой формы $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int\limits_X \omega_1 \wedge \bar{\omega}_2$. Выведите отсюда конечность группы $AutX$, если $g > 1$.

7. Пусть X - замкнутая риманова поверхность, ассоциированная с кривой $y^2 = x^6 - 1$. Обозначим через p_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, 5)$ точку $\left(e^{\pi\sqrt{-1}k/3}, 0\right)$ на X, и пусть $s_1 = (0, i)$, $s_2 = (0, -i)$. Найти необходимые и достаточные условия для существования мероморфной функции на X с заданными лорановскими хвостами:

$\frac{\alpha_k}{y}$ в точке p_k, $k = 0, \ldots, 5$.

$\frac{\beta}{x}$ в точке s_1

$\frac{\gamma}{x}$ в точке s_2