Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и θ-функции
Векторные поля и дифференциальные формы.

Упражнение 2.1. Проверьте, что 1-форма dz на проективной прямой имеет в бесконечности полюс 2-го порядка.

Упражнение 2.2. Докажите, что у любой ненулевой мероморфной 1-формы на проективной прямой есть полюса.

Упражнение 2.3. Подсчитайте размерность пространства голоморфных векторных полей на $\mathbf{CP}^1$.

Упражнение 2.4. Чему равна разность суммы порядков нулей и суммы порядков полюсов а) мероморфной 1-формы; б) мероморфного векторного поля на $\mathbf{CP}^1$?

Упражнение 2.5. Проверьте, что мероморфная 1-форма dz/z не является дифференциалом никакой мероморфной функции.

Упражнение 2.6. Сформулируйте простое необходимое и достаточное условие того, чтобы мероморфная 1-форма на $\mathbf{CP}^1$ была точна.

Упражнение 2.7. Проверьте, что если мероморфная 1-форма на объемлющем пространстве вложенной кривой является дифференциалом мероморфной функции на нем, то ее ограничение на кривую является дифференциалом ограничения функции на кривую.

Упражнение 2.8. Найдите порядки нулей и полюсов ограничения на кривую

$$x^n + y^n = 1$$

дифференциальных 1-форм а) xdx, б) xdy.

Упражнение 2.9. Рассмотрим проекцию кривой $x^2 + y^2 = 1$ на ось x. Верно ли, что любая мероморфная 1-форма на этой кривой является поднятием 1-формы с оси x при этом отображении?

Пример 2.10. Рассмотрим на комплексной прямой $\mathbf{C}$ с координатой z дифференциальную 1-форму dz. Эта 1-форма инвариантна относительно сдвигов $z \mapsto z + z_0$ комплексной прямой, поэтому она опускается на любую эллиптическую кривую. (Напомним, что эллиптической кривой называется факторкривая прямой $\mathbf{C}$ по действию решетки сдвигов, натянутой на пару векторов $1, \tau \in \mathbf{C}$, где $\Re\tau > 0$.) Эта форма не имеет полюсов на $\mathbf{C}$, поэтому ее образ на любой эллиптической кривой является голоморфной 1-формой на ней. Тем самым мы построили на эллиптических кривых по голоморфной 1-форме.

Упражнение 2.11. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на эллиптической кривой пропорциональна построенной выше с постоянным коэффициентом пропорциональности. Это означает, что пространство голоморфных 1-форм на эллиптической кривой одномерно над $\mathbf{C}$.

Упражнение 2.12. Докажите, что ограничение на гиперэллиптическую кривую $y^2 = P_m(x)$, где P_m — многочлен степени m, 1-форм $x^k dy$ при $k < (m-2)/2$ голоморфно. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на такой кривой представляется в виде линейной комбинации выписанных 1-форм.

Упражнение 2.13. Докажите, что размерность пространства голоморфных 1-форм на плоской кривой равна роду этой кривой.