25.09.03

Римановы поверхности

Дивизоры, мероморфные функции и формы

X - замкнутая риманова поверхность

Обозначения. $D = \sum\limits_{x \in X} n_x x$, $n_x = 0$ почти всюду на X - дивизор, $MerX$ - поле мероморфных функций на X, $MerdiffX$ - мероморфные дифференциальные формы на X , $L(D) = \{f \in MerX | \, div(f) + D \geq 0\}$, $\widetilde{L}(D) = \{w \in Merdiff(X) | \, divw + D \geq 0\}$

Определение. Если $D_1 = D_2 + div(h)$, $h \in MerX$, то дивизоры D_1 и D_2 называются эквивалентными (пишут $D_1 \sim D_2$).

Задачи (полезные мелочи)

1. Пусть X задана в $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ уравнением $y^2 z = x^3 - xz^2$, $p_0 = (0,1,0)$, $p_1 = (0,0,1)$, $p_2 = (1,0,1)$ и $p_3 = (-1,0,1)$. Доказать, что $2p_0 \sim 2p_i$, $i = 1,2,3$, $p_1 + p_2 + p_3 \sim 3p_0$.

2. Пусть $D_1 \geq 0$, $D_2 \geq 0$, и носители D_1 и D_2 не пересекаются (носитель $D = \{x \in X | \, n_x \neq 0\}$). Если $D_1 \sim D_2$, то существует такое голоморфное отображение $F : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, что $D_1 = F^{-1}(0)$ и $D_2 = F^{-1}(\infty)$.

3. а) Если $D_1 \leq D_2$, то $L(D_1) \subseteq L(D_2)$.
б) $L(0) \simeq \mathbb{C}$
в) $L(D) = \{0\}$, если $degD = \sum n_x < 0$.
г) $\widetilde{L}(0) = \Omega^1(X)$ - пространство голоморфных дифференциалов на X.
д) Если $D_1 \sim D_2$, то $L(D_1)$ и $L(D_2)$ (равно как и $\widetilde{L}(D_1)$ и $\widetilde{L}(D_2)$) естественно изоморфны.

4. Пусть $w \neq 0$ мероморфная форма на X, $K = divw$. Доказать, что пространства $\widetilde{L}(D)$ и $L(D+K)$ естественно изоморфны. В частности, $dim\widetilde{L}(D) = dimL(D+K)$.

5. Пусть $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Тогда

$$dimL(D) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad degD < 0 \\ 1 + degD, & \text{если} \quad degD \geq 0 \end{cases}$$

6. Пусть $X = \mathbb{C}/L$. Если $degD > 0$, то $dimL(D) = degD$. Вычислить $dimL(D)$, если $degD = 0$.

7. а) Пусть $p \in X$. Тогда либо $L(D-p) = L(D)$, либо коразмерность $L(D-p)$ в $L(D)$ равна 1.

б) Если $D \geq 0$, то $dimL(D) \leq 1 + degD$.
в) $dim\widetilde{L}(D) < \infty$ для любого дивизора D на X.
г) Если $E \geq 0$, то codim $L(D)$ в $L(D+E)$ не превосходит $degE$.

8. Доказать, что $\sum\limits_{x\in X} Res_x w = 0$, где $w \in Merdiff(X)$, а Res_x - вычет формы w в точке $x \in X$.

9. Пусть $X = \mathbb{C}/L$, $p \in X$. Тогда
а) существует единственная мероморфная функция $f \in L(2p)$ с лорановским рядом вида ${}^1\!/_{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots$ в точке p (Эта функция называется функцией Вейерштрасса).
б) существует единственная функция $g \in L(3p)$ с рядом Лорана вида ${}^1\!/_{z^3} + b_1 z + \ldots$.
в) $g^2 = f^3 + Af + B$ (A и B – некоторые константы).

10. Доказать, что A - периоды однозначно определяют голоморфный дифференциал.

11. Пусть ω_1 и ω_2 две замкнутые 1-формы на X. Доказать, что $\int\limits_X \omega_1 \wedge \omega_2 = \sum\limits_{i=1}^{g} \left[\int\limits_{A_i} \omega_1 \int\limits_{B_i} \omega_2 - \int\limits_{B_i} \omega_1 \int\limits_{A_i} \omega_2 \right]$ (Указание: "поднять" задачу на универсальную накрывающую, где $\omega_1 = df_1$ и где Вас ждет канонический $4g$-угольник P. Вычислить $\int\limits_P df_1 \wedge \omega_2$ с помощью формулы Стокса).

12. Занятное вычисление предыдущей задачи полезно чуть-чуть обобщить, доказав, что

$$\sum_{i=1}^{g} \left[\int\limits_{A_i} \omega_1 \int\limits_{B_i} \omega_2 - \int\limits_{B_i} \omega_1 \int\limits_{A_i} \omega_2 \right] = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{p\in P^0} Res_p\,(f_1\omega_2),$$

(но на этот раз мы рассматриваем два мероморфных дифференциала ω_1 и ω_2 на X и <u>предполагаем</u>, что $\omega_1 = df_1$ для некоторой мероморфной функции на универсальной накрывающей).