Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и θ-функции
Якобиан и теорема Абеля.

Упражнение 4.1. Докажите, что на кривой рода $g > 0$ две различные точки не могут представлять линейно эквивалентные дивизоры.

Комплексная кривая рода $g > 1$ называется *гиперэллиптической*, если на ней есть мероморфная функция степени два; кривая называется *тригональной*, если на ней есть мероморфная функция степени три.

Упражнение 4.2. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + ax + b}}.$$

Более общим образом, найдите неопределенный интеграл

$$\int R(x, y)dx,$$

где $y^2 = x^2 + ax + b$, а R — произвольная рациональная функция.

Упражнение 4.3. Пусть α, β — два линейно независимых цикла на эллиптической кривой, ω — ненулевая голоморфная 1-форма на ней. Докажите, что периоды

$$a = \int_\alpha \omega \text{ и } b = \int_\beta \omega$$

линейно независимы над полем вещественных чисел.

Упражнение 4.4. Докажите, что если классы гомологий кривых α, β с обшим началом и концом порождают группу гомологий тора над целыми числами, то можно выбрать таких представителей этих классов, которые не имеют самопересечений и пересекаются трансверсально в одной точке.

Упражнение 4.5. Периоды $na + mb$ эллиптической кривой образуют решетку на комплексной прямой. Докажите, что фактор по этой решетке изоморфен исходной эллиптической кривой.

Упражнение 4.6. Пусть C — плоская эллиптическая кривая, p — точка этой кривой, q_1, q_2, q_3 — точки пересечения кривой C с некоторой прямой L. Докажите, что

$$\int_p^{q_1} \omega + \int_p^{q_2} \omega + \int_p^{q_3} \omega$$

не зависит от выбора прямой L.

Упражнение 4.7. Более общим образом, пусть $D = (f)$ — главный дивизор на эллиптической кривой и $\Lambda \subset \mathbf{C}$ — решетка ее периодов. Занумеруем нули p_i и полюса q_j произвольным образом. Тогда

$$\sum_i \int_{p_i}^{q_i} \omega \equiv 0 \mod \Lambda.$$

Более общим образом, рассмотрим g-мерное векторное пространство $\Omega(C)$ голоморфных 1-форм на кривой C рода $g \geq 1$. С каждой замкнутой кривой γ на C можно связать линейный функционал

$$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$$

на этом пространстве. Все такие функционалы образуют решетку в двойственном пространстве $\Omega^\vee(C)$. Комплексный тор, являющийся фактором по этой решетке, называется *якобианом* кривой C и обозначается через $J(C)$.

Упражнение 4.8. Докажите, что функционалы периодов действительно образуют $2g$-мерную решетку, т.е. среди них есть $2g$ линейно-независимых.

Упражнение 4.9. Докажите, что не всякая 4-мерная решетка в $\mathbf{C}^2$ реализуется как решетка периодов некоторой кривой рода 2. Каким условиям должна удовлетворять 4-мерная решетка, образованная функционалами периодов?

Сопоставим главному дивизору (f) мероморфной функции на кривой линейный функционал $\mu_f : \omega \mapsto \sum \int_{p_i}^{q_i} \omega$ на пространстве голоморфных 1-форм; здесь мы выбрали произвольную нумерацию нулей p_i и полюсов q_i функции f.

Упражнение 4.10. Докажите, что выписанный функционал корректно определен как точка якобиана, т.е. он не зависит от выбора путей, соединяющих p_i с q_i, а также от выбора нумерации нулей и полюсов.

Упражнение 4.11. Докажите, что построенный линейный функционал совпадает с нулем как точка якобиана.

Распространим определение функционала μ_f на произвольные дивизоры нулевой степени (функционал, отвечающий дивизору D, будем обозначать через μ_D).

Упражнение 4.12. Докажите, что функционал μ_D корректно определен.

Упражнение 4.13 (теорема Абеля). Докажите, что функционал μ_D совпадает с нулем как точка якобиана в том и только в том случае, если дивизор D главный.

Упражнение 4.14. Докажите, что отображение $D \mapsto \mu_D$ задает изоморфизм фактор-группы группы дивизоров нулевой степени по подгруппе главных дивизоров на якобиан.

Упражнение 4.15. Зафиксируем на кривой C точку $p \in C$ и определим отображение $\mu : C \to J(C)$ кривой в ее якобиан формулой

$$\mu : q \mapsto \int_p^q .$$

Будем говорить, что кривая C симметрична, если $u(c) = -u(C)$ (обратите внимание на то, что знак "$-$" в якобиане корректно определен). Докажите, что кривая симметрична тогда и только тогда, когда она гиперэллиптическая.

Упражнение 4.16. Докажите, что отображение μ кривой рода 2 в ее якобиан является изоморфизмом на образ.