9.10.03

Римановы поверхности и ...

Задачи

1. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ - базис пространства $\Omega(X)$ голоморфных дифференциалов на замкнутой связной римановой поверхности X. Доказать, что $rk(\omega_1(P), \ldots, \omega_g(P))$ равен 1 в любой точке $p \in X$.

2. Доказать, что на X не существует функции ровно с одним полюсом.

3. Доказать, что отображение Абеля u: $X \to J(X)$, $u(x) = \left(\int\limits_*^x \omega_1, \ldots, \int\limits_*^x \omega_g\right)$ есть вложение кривой в якобиан.

4. В одном из предыдущих листков содержится очень правильное описание якобиана

$$J(X) = \Omega(X)^* / H_1(X, \mathbb{Z}) \tag{1}$$

(точка $u(p)$ соответствует смежному классу линейного функционала $\omega \to \int\limits_*^p \omega$).

В пространстве $\Omega(X)$ имеется естественное эрмитово скалярное произведение Ходжа

$$\langle \varphi, \eta \rangle = \frac{\sqrt{-1}}{2} \int\limits_X \varphi \wedge \bar{\eta}$$

Таким образом, пространство $\Omega(X)^*$ наследует двойственное скалярное произведение, которое ввиду (1) превращает $J(X)$ в плоское эрмитово многообразие. Отображение Абеля переносит эту метрику с $J(X)$ на X.

Докажите, что
а) полученная на X конформная метрика ds^2 задается в локальных координатах формулой $ds^2 = K(z)|dz|^2$, где $K(z) = \sum\limits_{i,j} \omega_i(z) \lambda_{ij} \overline{\omega_j(z)}$ ($\omega_1, \ldots, \omega_g$ - нормированный базис с матрицей периодов $\Pi = (E, \Omega)$, $\lambda = (Im\Omega)^{-1}$);
б) объем X в этой метрике равен g;
в) кривизна метрики ds^2 неположительна (точки, где кривизна равна нулю, называются точками Вейерштрасса римановой поверхности X).

5. Докажите, что
а) $deg(df) = 2g - 2$ для любой непостоянной мероморфной функции $f \in MerX$;
б) $deg(\omega) = 2g - 2$ для любой мероморфной дифференциальной 1-формы на X.

6. Риманова поверхность называется удобной, если:
а) в любой точке существует такой локальный параметр, который продолжается до мероморфной функции на всей поверхности X,
б) для любой пары точек $p, q \in X$, $p \neq q$, существует такая мероморфная функция на X, что $f(p) \neq f(q)$.

Пусть X - удобная поверхность. Тогда

6.1. Для любых двух точек $p, q \in X$ существует мероморфная функция с нулем в точке p и полюсом в точке q.

6.2. Для любого конечного набора точек $p, q_1, \ldots q_n$ существует мероморфная функция с нулем в p и полюсами в каждой из точек q_i.

6.3. Выберем конечное число точек $p_1, \ldots, p_n$ на X, локальные параметры z_i в точках p_i и, наконец, конечное число лорановских "хвостов" $r_i(1/z_i)$ для каждого i. Существует мероморфная функция f на X с лорановским "хвостом" $r_i(1/z_i)$ в точке p_i для любого i.

Прощаясь, скажу, что любая риманова поверхность удобна, но это очень глубокий и тонкий факт.