Высший Колледж Математики

Римановы поверхности и θ-функции
Разветвленные накрытия сферы и теорема Римана.

Если Y — двумерная поверхность, C — комплексная кривая и $f : Y \to C$ — (топологическое) накрытие, то комплексную структуру с C можно поднять на Y. В частности, эта конструкция работает в случае, когда C — проективная прямая с проколотыми точками, $C = \mathbf{CP}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_c\}$.

Упражнение 6.1. Докажите, что кольцо $\{z|0 < r < |z| < R\} \subset \mathbf{C}$ не биголоморфно проколотому диску $\{z|0 < |z| < R\}$ (другими словами, сфера с проколами и сфера с дырками — разные кривые).

Будем считать, что поверхность Y связна, а степень d накрытия конечна. Определим понятие монодромии накрытия следующим образом. Зафиксируем точку $t_0 \in C$ и рассмотрим гладкий путь $\gamma : [0,1] \to C$ с началом и концом в этой точке, причем такой, что его внутренние точки не совпадают с t_0. Он определяет перестановку конечного множества из d элементов — прообраза $f^{-1}(t_0) \subset Y$: нужно рассмотреть поднятие $f^{-1}(\gamma) \subset Y$ этого пути и выкинуть из него слой над точкой t_0; в результате прообраз пути разобьется на d компонент связности, конец каждой из которых задает, куда переходит его начало. Полученная перестановка и называется *монодромией слоя вдоль пути* γ.

Упражнение 6.2. Проверьте, что монодромия вдоль пути зависит только от его гомотопического класса и что монодромия является гомоморфизмом $\pi_1(C, t_0) \to S_d$ из фундаментальной группы проколотой сферы с базисной точкой t_0 в группу S_d перестановок слоя.

Упражнение 6.3. Распространите определение монодромии на пути, неоднократно проходящие через базисную точку t_0.

Соединив каждую из выколотых точек t_i с точкой t_0 несамопересекающимся отрезком гладкой кривой так, чтобы эти отрезки не пересекались, мы получаем граф-звезду с c лучами на сфере. Потребуем, чтобы циклический порядок лучей на входе в точку t_0 совпадал с задаваемым нумерацией выколотых точек. Сопоставим i-ому отрезку путь γ_i, идущий из точки t_0 вдоль отрезка, обходящий точку t_i в положительном направлении и возвращающийся по отрезку в обратном направлении. Монодромии вдоль путей γ_i задают набор перестановок σ_i на прообразе, обладающий следующими свойствами:

- подгруппа в S_d, порожденная перестановками σ_i, действует на слое транзитивно, т.е. для любой пары точек в прообразе есть перестановка из подгруппы, переводящая первую точку во вторую (эта подгруппа называется *группой монодромии* накрытия);
- последовательное произведение $\sigma_c \circ \ldots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ этих перестановок является тождественной перестановкой.

Упражнение 6.4. Докажите эти свойства.

Упражнение 6.5. Проверьте, что цикловой тип (т.е. набор длин циклов) перестановки σ_i не зависит ни от выбора точки t_0, ни от выбора пути γ_i.

Упражнение 6.6. Докажите, что в накрывающую поверхность над проколотым диском можно доклеить по точке на каждый цикл монодромии накрытия, причем полученная поверхность будет гладкой, отображение накрытия продолжается по непрерывности в доклеенные точки и продолженное отображение является гладким.

Такое продолженное отображение называется *разветвленным накрытием.* Доклеенная точка называется *точкой ветвления кратности* ν, если длина соответствующего ей цикла равна ν.

Упражнение 6.7. Докажите, что в окрестности точки ветвления порядка ν функция f в подходящих комплексных координатах имеет вид $x \mapsto x^\nu$.

Упражнение 6.8. Докажите, что для любого набора точек $\{t_1, \dots, t_c\}$ на сфере, любой звезды на этих точках и любого набора перестановок $\sigma_1, \dots, \sigma_c$, обладающего выписанными свойствами, существует накрытие $Y \to S^2 \setminus \{t_1, \dots, t_c\}$, для которого монодромия вдоль пути γ_i совпадает с σ_i. Это накрытие единственно, т.е. для двух таких накрытий $f_1 : Y_1 \to$ и $f_2 : Y_2 \to$ существует гомеоморфизм $h : Y_1 \to Y_2$, такой, что $f_2 = h \circ f_1$.

Упражнение 6.9 (формула Римана–Гурвица). Рассматривая прообраз графа-звезды на накрывающей компактной поверхности, докажите, что ее эйлерова характеристика равна

$$2d - \sum(\nu_x - 1),$$

где ν_x — кратность функции f в точке x накрывающей поверхности и суммирование идет по всем ее точкам.

Упражнение 6.10. Сформулируйте и докажите формулу Римана–Гурвица для случая накрываемой поверхности произвольного рода.

Упражнение 6.11 (теорема Римана). Зафиксируем на сфере S^2 комплексную структуру. Докажите, что всякое конечнократное накрытие $Y \to S^2 \setminus \{t_1, \dots, t_c\}$ проколотой сферы единственным образом продолжается до голоморфного отображения компактных комплексных кривых $\overline{Y} \to \mathbf{CP}^1$.

Тем самым, любую мероморфную функцию степени d на компактной комплексной кривой можно задать набором непрерывных параметров — точек $t_1, \dots, t_c$ на проективной прямой и набором дискретных параметров — выбором звезды и c перестановок множества из d элементов.

Упражнение 6.12. Пусть накрываемая поверхность представляет собой не сферу, а проколотую поверхность более высокого рода. Как нужно изменить понятия звезды и набора перестановок, чтобы накрывающая поверхность по-прежнему восстанавливалась однозначно?

Упражнение 6.13. Найдите группу монодромии следующих отображений: а) $\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$, $x \mapsto x^n$; б) $\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$, $x \mapsto x^3 - x$; в) $\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$, $x \mapsto x + 1/x$; г) $\mathbf{CP}^1 \to \mathbf{CP}^1$, $x \mapsto x + 1/x + 1/(x-1)$; д) проекции на ось y эллиптической кривой $y^2 = x^3 - x$; е) проекции на ось x гиперэллиптической кривой $y^2 = p_{2g+2}(x)$, где p_{2g+2} — многочлен степени $2g + 2$ с попарно различными корнями; ж) проекции на ось y эллиптической кривой $y^2 = (x^2 - 1)(4 - x^2)$; з) проекции на ось x кривой Ферма $x^n + y^n = 1$. Во всех случаях мы предполагаем, что кривая, заданная уравнением в плоскости, пополнена до компактной гладкой кривой, а отображение продолжено на нее по непрерывности.

Упражнение 6.14. Выведите из формулы Римана–Гурвица, что группа автоморфизмов поверхности рода g, $g \geq 2$, не может содержать больше, чем $84(g-1)$ элементов. [**Указание:**] Воспользуйтесь следущим соображением. Рассмотрим факторкривую кривой C по действию конечной группы G ее атоморфизмов, состоящей из d элементов, $f: C \to C/G$. Тогда порядки ветвления отображения f во всех точках ветвления с общим критическим значением одинаковы. Обозначим порядок ветвления над i-ым критическим значением через r_i, $i = 1, \ldots, c$. По формуле Римана–Гурвица

$$(2g-2)/d = 2g(C/G) - 2 + \sum_{i=1}^{c}(1 - \frac{1}{r_i}),$$

и величину d можно оценить, воспользовавшись тем, что $g \geq 2$ и $g(C/G) \geq 0$.

Упражнение 6.15. Придумайте пример комплексной кривой рода $g \geq 2$ с группой автоморфизмов порядка $84(g-1)$.