Высший Колледж Математики

θ-функции и алгебраические кривые
Занятие 7. Подходы к построению пространств модулей

1 Первые примеры

Сейчас мы начнем строить пространства $\mathcal{M}_{g;n}$ модулей кривых рода g с n отмеченными точками. Мы предполагаем, что $n \geq 3$ при $g = 0$ и $n \geq 1$ при $g = 1$. Точки считаются занумерованными, т.е. в качестве отношения эквивалентности берутся биголоморфизмы кривой, переводящие каждую из отмеченных точек в отмеченную точку с тем же номером. Как правило, мы будем обозначать отмеченные точки $x_1, \ldots, x_n$.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{0;3}$ устроено совсем просто: любые две тройки точек на проективной прямой переводятся друг в друга дробно-линейным преобразованием. Поэтому $\mathcal{M}_{0;3}$ состоит из одной точки. Эту точку можно представлять себе проективной прямой с фиксированной координатой z, причем отмеченные точки имеют координаты $0, 1$ и ∞.

Пространство модулей $\mathcal{M}_{0;4}$ естественным образом отождествляется с проективной прямой с тремя проколотыми точками (выбор проколов, согласно приведенному выше рассуждению, не важен). При фиксированных точках x_1, x_2, x_3 на проективной прямой четвертая точка x_4 может принимать любое положение, не совпадающее с положением ни одной из первых трех точек. Положение этой четвертой точки и является параметром на пространстве модулей. Если точки x_1, x_2, x_3, x_4 в произвольной координате на проективной прямой имеют координаты соответственно z_1, z_2, z_3, z_4, то значение этого параметра выражается *двойным отношением*

$$\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} : \frac{z_1 - z_4}{z_4 - z_2}. :$$

Двойное отношение является инвариантом дробнолинейных преобразований и не может принимать значений $0, 1$ и ∞.

Упражнение 1.1. Проверьте, что дробно-линейные преобразования сохраняют Двойное отношение.

Случай эллиптических (т.е. рода $g = 1$) кривых с $n = 1$ более сложен. Такая кривая является фактором комплексной прямой по некоторой двумерной решетке. Отмеченная точка совпадает с образами точек решетки при факторизации. Решетка задается парой комплексных векторов τ_1, τ_2, таких, что отношение τ_1/τ_2 невещественно. Мы будем предполагать, что порядок этих векторов задает на комплексной прямой ориентацию, совпадающую с обычной комплексной ориентацией. Группа $\mathbf{C}^*$ ненулевых комплексных чисел по умножению действует на множестве образующих решеток по правилу

$$c : (\tau_1, \tau_2) \mapsto (c\tau_1, c\tau_2), \qquad c \in \mathbf{C}^*.$$

Такое действие устанавливает биголоморфизм кривых, отвечающих этим двум решеткам. Кроме того, на множестве образующих решеток действует группа $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ (модулярная группа Клейна), состоящая из дробно-линейных преобразований с целыми коэффициентами:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Такое действие меняет базис решетки, сохраняя саму решетку. Поэтому оно сохраняет и соответствующую кривую.

Умножив базис (τ_1, τ_2) на $c = 1/\tau_1$, мы получим базис $(1, \tau)$, где $\tau = \tau_2/\tau_1$ — комплексный вектор, лежащий в верхней полуплоскости. Дальнейшая факторизация по действию модулярной группы Клейна позволяет отождествить пространство векторов τ с *модулярной кривой*. Это фундаментальная область группы $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ в верхней полуплоскости, в качестве которой можно выбрать полосу, ограниченную окружностью и двумя прямыми:

$$\left\{ z \in \mathbf{C} | -\frac{1}{2} \leq \Re z \leq \frac{1}{2}, \quad |z| \geq 1, \mathrm{Im} z > 0 \right\}.$$

При этом на границах этой области необходимо провести отождествление. Эти точки склеиваются попарно в соответствии с правилом: $x + iy \;\; -x + iy$.

Упражнение 1.2. Докажите, что описанная кривая действительно является фактор-пространством верхней полуплоскости по действию модулярной группы Клейна.

Упражнение 1.3. Найдите группы автоморфизмов эллиптических кривых, соответствующих особым точкам модулярной кривой (т.е. кривых, вектор τ решетки которых имеет значения $\tau = 1$ и $\tau = e^{2\pi/3}$).

2 Требования к пространству модулей

В предыдущем разделе мы привели примеры пространств модулей кривых. Однако у нас до сих пор нет строгого определения того, что это такое. В то же время ясно, что это определение должно быть устроено так, чтобы включать в себя приведенные выше примеры. Итак, обсудим, какие требования представляются естественными.

1. Точки пространства модулей должны взаимно- однозначно соответствовать классам биголоморфной эквивалентности комплексных кривых. Несмотря на естественность, это требование представляется не очень сильным, поскольку мы пока не наложили никаких специальных требований на взаимнооднозначное соответствие.

2. На пространстве модулей должна иметься комплексная структура. Это тоже не слишком сильное требование, поскольку упомянутая комплексная структура пока никак не связана с самими точками — модулями кривых. В то же время мы вправе ожидать, что *комплексные кривые, задающиеся близкими уравнениями в проективном пространстве, определяют близкие точки пространства модулей.* Формализация этого требования содержится в следующем пункте.

3. Предположим пока, что $g \geq 2$, $n = 0$. Мы вправе ожидать, что пространство модулей кривых существует не само по себе, а в сочетании с *универсальной кривой*, т.е. с таким комплексным многообразием $\mathcal{C}_{g;0}$ размерности $\dim \mathcal{M}_{g;0} + 1$ и таким отображением $\pi : \mathcal{C}_{g;0} \to \mathcal{M}_{g;0}$, что прообраз $\pi^{-1}(c)$ общей точки является комплексной кривой C, класс эквивалентности которой совпадает с $c \in \mathcal{M}_{g;0}$. Необщие точки пространства модулей это кривые, имеющие автоморфизмы. Слоем универсальной кривой над такой необщей точкой является факторкривая самой кривой по действию ее группы автоморфизмов. Кстати, именно существование кривых с нетривиальными автоморфизмами является препятствием к существованию *тонкого* пространства модулей кривых.

Пусть E, B — два комплексных многообразия, $p : E \to B$ — голоморфное отображение, такое, что прообраз $p^{-1}(b)$ любой точки $b \in B$ является комплексной кривой рода g. Тогда мы требуем, чтобы существовали голоморфные отображения $E \to \mathcal{C}_{g;0}$ и $B \to \mathcal{M}_{g;0}$, составляющие вместе с p и π коммутативный квадрат.

4. Как показывает пример пространства модулей эллиптических кривых с одной отмеченной точкой, мы не вправе ожидать, что пространство модулей будет *многообразием*. Действительно, на модулярной кривой имеется две специальные точки, не имеющих окрестности, изоморфной диску " $\mathbf{CP}^1$. Однако эта кривая является *орбиобразием*: у каждой ее точки есть окрестность, изоморфная фактору диска по действию конечной группы. Мы отложим обсуждение орбиобразий, отметив сейчас лишь, что их введение является необходимым элементом построения пространств модулей.

Теперь можно дать определение.

Определение 2.1. *Грубым пространство модулей кривых* рода g называется тройка $(\mathcal{C}_{g;0}, \mathcal{M}_{g;0}, \pi : \mathcal{C}_{g;0} \to \mathcal{M}_{g;0})$, состоящая из двух комплексных орбиобразий и отображения из первого орбиобразия на второе, такая, что

1. слои $\pi^{-1}(b)$, $b \in \mathcal{M}_{g;0}$ являются гладкими комплексными кривыми рода g;

2. всякая кривая рода g встречается в качестве слоя этого отображения в точности один раз;

3. для всякого голоморфного семейства $p : E \to B$ существуют голоморфные отображения $E \to \mathcal{C}_{g;0}$ и $B \to \mathcal{M}_{g;0}$, первое из которых — послойный изоморфизм, образующие вместе с проекциями π и p коммутативный квадрат.

Пример 2.2. При всяком $t \neq 0$ член семейства плоских кривых $xy = t$ Является рациональной кривой. При $t = 0$ член этого семейства — пара пересекающихся прямых $x = 0$ и $y = 0$. При этом тотальное пространство семейства — гладкая поверхность в трехмерном проективном пространстве.

Для случая кривых с отмеченными точками данное выше определение следует незначительно модифицировать. А именно, в тройку следует добавить четвертый элемент — набор из n сечений $\sigma_i : \mathcal{M}_{g;n} \to \mathcal{C}_{g;n}$, отвечающих отмеченным точкам: отмеченная точка x_i в слое $\pi^{-1}(b)$ это значение $\sigma_i(b)$ сечения σ_i в точке b. Разумеется, различные сечения не должны пересекаться.

Упражнение 2.3. Сформулируйте определение грубого пространства модулей кривых с отмеченными точками.

Упражнение 2.4. Как выглядит универсальная рациональная кривая а) с тремя; б) с четырьмя отмеченными точками? в) Как выглядит универсальная эллиптическая кривая с одной отмеченной точкой?

3 Возможные конструкции пространства модулей

Пространство модулей кривых рода 3 можно строить следующим образом. Как мы знаем, всякая такая кривая представима плоской кривой степени 4. Наоборот, всякая гладкая плоская кривая степени 4 является кривой рода 3. Поэтому мы можем взять пространство всех однородных кубических многочленов от трех переменных, проективизировать его и выделить в проективизированном пространстве (открытое) подмножество, многочленов, отвечающих особым кривым.

На проективизированном пространстве многочленов действует группа проективных преобразований $\mathrm{PGL}(3, \mathbf{C})$. Фактор по этому действию и является искомым пространством модулей.

Так построенное пространство модулей можно оснастить и универсальной кривой. Для этого следует рассмотреть прямое произведение пространства кубических многочленов на проективную плоскость и выделить в слое над каждым многочленом задаваемую им кривую. В результате мы получим гиперповерхность в прямом произведении. Действие группы проективных преобразований на базе продолжается до ее действия на всем прямом произведении. Ограничив это действие на выделенную гиперповерхность и профакторизовав эту гиперповерхность по указанному действию, мы получим универсальную кривую.

Аналогичным образом можно было бы поступить и с кривыми рода 2, только на этот раз в пространстве однородных многочленов третьей степени нужно выбрать подмножество, состоящее из всех многочленов, задающих кривые с одной двойной точкой. Построение универсальной кривой в этом случае затруднено необходимостью разрешить особенности слоя.

Какие трудности встречаются на описанном пути? Прежде всего, универсальной и, по-видимому, неустранимой трудностью является необходимость факторизовать по действию большой непрерывной группы. Проблема в том, что даже если такая группа действует на хорошем пространстве, фактор по этому действию может иметь очень плохие особенности — гораздо хуже тех, что мы ожидаем от орбиобразия (последнее локально является фактором по дискретному действию группы). Типичный пример подобной ситуации — действие группы вращений трехмерного пространства. Фактор по нему — полупрямая, начальная точка которой — особенность совершенно неалгебраического типа. Доказательство невозможности появления таких особенностей — трудная и принципиально важная задача.

Вторая трудность, к счастью, преодолима. Она касается проблемы компактификации пространства модулей. Строя пространство модулей, мы рассчитываем в дальнейшем построить его компактификацию — компактное пространство, содержащее пространство модулей в качестве открытого плотного подмножества. У каждого некомпактного пространства есть много различных компактификаций. При этом нам естественно искать *модулярную* компактификацию, т.е. такую, точки которой взаимнооднозначно соответствуют модулям некоторых кривых. Поскольку все гладкие кривые уже исчерпаны, эти точки должны соответствовать *особым* кривым.

Если мы компактифицируем пространство плоских кривых, то естественной компактификацией будет пространство плоских же кривых заданной степени. Однако такая компактификация невозможна.

Пример 3.1. Рассмотрим следующее семейство плоских эллиптических кривых:

$$y^2 - x^3 - t = 0,$$

зависящее от параметра t. При всех ненулевых значениях параметра t соответствующие кривые попарно эквивалентны (докажите!). Поэтому при $t \to 0$ мы должны получить ту же самую кривую. Однако при $t = 0$ соответствующая кривая семейства, $y^2 = x^3$, имеет особенность типа точки возврата (каспа), что указывает на невозможность построить компактификацию таким образом.

В дальнейшем мы будем компактифицировать пространство модулей модулями таких кривых, которые имеют лишь простейшие особенности — двойные самопересечения. Для этого гладкие кривые приходится вкладывать не в плоскость, а в пространство большой размерности, где бо́льшая свобода позволяет кривым вырождаться, не приобретая сложных особенностей. Интересующие нас пространства кривых в этом случае уже не описываются пространствами однородных многочленов, поскольку множество нулей однородного многочлена в многомерном случае — гиперповерхность, а не кривая. Такие пространства кривых описываются новым для нас объектом — *схемой Гильберта.*

4 Плюриканонические вложения

Для помещения кривой в пространства большой размерности будем пользоваться плюриканоническими вложениями. Как мы видели, каноническое отображение кривой рода $g \geq 2$ является вложением в том и только в том случае, если кривая негиперэллиптическая.

Теорема 4.1. *Рассмотрим на кривой C рода $g \geq 2$ 3-ю тензорную степень канонического линейного расслоение. Тогда соответствующее этому линейному расслоению отображение кривой C в проективное пространство является вложением.*

Напомним, что вложение строится по линейному расслоению следующим образом: мы выбираем произвольный базис $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N$ в пространстве голоморфных сечений расслоения и отображаем точку x нашей кривой в точку $(\rho_0(x) : \rho_1(x) : \dots \rho_N(x))$. Образ такого отображения лежит в N-мерном проективном пространстве, и он определен однозначно с точностью до проективной замены координат.

Замечание 4.2. Третью степень в утверждении теоремы можно заменить на любую бо́льшую степень.

Упражнение 4.3. Найдите размерность N проективного пространства голоморфных сечений третьей степени канонического расслоения.

Упражнение 4.4. Приведите пример кривой рода $g \geq 2$, на которой вторая степень канонического расслоения не задает вложения.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы нам понадобится еще одна форма формулы Римана-Роха. До сих пор мы применяли ее только к одной паре линейных расслоений: тривиальному и каноническому. Однако она имеет более широкое применение. А именно, пусть D — дивизор некоторого сечения линейного расслоения L. Тогда дивизор D' любого другого ненулевого сечения рационально эквивалентен дивизору D, поскольку любые два сечения линейного расслоения отличаются на мероморфный множитель. Наоборот, любому дивизору D можно сопоставить линейное расслоение, такое, что он является дивизором некоторого его сечения. При этом расслоение однозначно определено классом рациональной эквивалентности дивизора D.

Тем самым, можно говорить о размерности $l(D)$ пространства