30.10.03

Римановы поверхности и ...

Задачи

1. Нарисуйте график функции $f(n) = dimL(n \cdot P)$, где $n \in \mathbb{Z}$, а P - точка римановой поверхности X рода g.

2. Нарисуйте график функции $\tilde{f}(n) = dim\tilde{L}(n \cdot P)$.

Попробуйте найти матрицу периодов кривой $y^2 = x^6 - 1$, решив предварительно задачи **3 а, б, в**.

3а) Пусть X поверхность рода 2, (ω_1,ω_2) - базис пространства $\Omega^1(X)$. Тогда мероморфная функция $f = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ определяет голоморфное отображение $f : X \to \mathbb{CP}^1$ степени 2, разветвленное над шестью точками $\mathbb{CP}^1$ (6 критических значений f).

3б) Пусть b_1 и b_2 - два критических значения f, r_1 и r_2 - их прообразы на X, и γ - путь из b_1 в b_2, избегающий оставшихся критических значений. Тогда подъем γ на X состоит из двух путей γ_1 и γ_2 из r_1 в r_2. Доказать, что циклы γ_1–γ_2 порождают группу $H_1(X, \mathbb{Z})$.

3в) Доказать, что в качестве ω_1 и ω_2 можно выбрать формы $\frac{dx}{y}$ и $\frac{xdx}{y}$.

4. Риманова поверхность X называется гиперэллиптической, если на ней существует мероморфная функция $f : X \to \mathbb{CP}^1$ степени $degf = 2$.

Вычислить размерность пространства модулей гиперэллиптических поверхностей рода g.

5. Пусть $W(g_1, \ldots, g_r)$ - определитель Вронского системы r-мероморфных функций на X. Тогда выражения $W_z(g_1(z), \ldots, g_r(z))(dz)^{\frac{r(r-1)}{2}}$ задают локально мероморфный $\frac{r(r-1)}{2}$-дифференциал на X.

6. Доказать, что все линейные голоморфные расслоения над $\mathbb{C}$ тривиальны.

7. Найти, с точностью до изоморфизма, все линейные голоморфные расслоения над $\mathbb{CP}^1$.

8. Пусть $|f| = D$ - главный дивизор степени 0 на X. Тогда мероморфная 1-форма $\omega = \frac{df}{f}$ обладает следующими свойствами:

∘ её особенности (простые полюса) расположены в точках носителя дивизора D.

∘∘ $Res_p(\omega) = D(p)$, $p \in X$

∘ ∘ ∘ её A- и B- периоды целочисленно кратны $2\pi\sqrt{-1}$.

9. Пусть $\{P_1, \ldots, P_S\}$ набор различных точек на X, а $a_1, \ldots, a_s$ - вещественные числа, сумма которых равна 0. Доказать, что существует такой единственный мероморфный дифференциал ω, что

∘ особенности ω - это простые полюса в точках $P_1, \ldots, P_S$

∘ ∘ $Res_{p_i}\omega = a_i$

∘ ∘ ∘ все периоды ω чисто мнимы.