1 Определение и примеры стабильных кривых

Необходимость компактификации пространств модулей кривых и требование модулярности приводят к необходимости помимо гладких рассматривать также и особые кривые. При этом хотелось бы, чтобы вновь рассматриваемые особые кривые имели как можно более простые особенности и их группа автоморфизмов по-прежнему была конечной. Этим требованиям удовлетворяют так называемые стабильные кривые. Добавление стабильных кривых компактифицирует пространство модулей.

Определение 1.1. *Стабильной кривой* называется комплексная кривая, имеющая, быть может, точки простого самопересечения, группа автоморфизмов которой конечна.

Это определение требует пояснения, но прежде, чем давать его, приведем пару примеров.

Пример 1.2. Пусть C_1, C_2 — две эллиптические кривые, p_1, p_2 — точки соответственно на первой и на второй кривой. Рассмотрим кривую, полученную путем отождествления точек p_1 и p_2. Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами кривой C_1, сохраняющими точку p_1, автоморфизмами кривой C_2, сохраняющими точку p_2, а также, быть может, автоморфизмами перестановки кривых C_1 и C_2, переводящими точку p_1 в точку p_2 (последние существуют только если кривые C_1 и C_2 изоморфны).

Пример 1.3. Пусть p, q — точки эллиптической кривой. Рассмотрим кривую C, полученную путем отождествления точек p и q. Эта кривая стабильна. Действительно, ее автоморфизмы порождены автоморфизмами исходной эллиптической кривой $\widetilde{C}$, полученной из C «разделением» точек p и q, сохраняющих пару точек p и q. Группа таких автоморфизмов конечна.

Чтобы понять, что означают слова «простое пересечение» в определении стабильной кривой, нужно сказать, что такое нормализация такой кривой, и как выглядит кольцо мероморфных функций на ней. *Нодальной* кривой называется такое одномерное комплексное многообразие с особенностями, у которого помимо гладких точек могут быть также точки, имеющие окрестность, биголоморфную паре дисков с одной общей точкой (которую можно считать центром обоих дисков). Такие особые точки называются *простыми двойными* точками, или *узлами*, или точками *простого самопересечения*. Число простых двойных точек на нодальной кривой конечно. Мы говорим об абстрактных кривых, однако простую двойную точку удобно представлять себе как точку трансверсального самопересечения плоской кривой.

Для каждой нодальной кривой C определена ее *нормализация*. Это гладкая комплексная кривая $\widetilde{C}$ вместе с отображением $\widetilde{C} \to C$, являющимся локальным биголоморфизмом всюду, за исключением прообразов двойных точек. У каждой из двойных точек имеется в точности два прообраза, и у каждого из этих прообразов имеется окрестность, биголоморфно отображающаяся на один из дисков окрестности двойной точки (каждый из прообразов приписан к своему диску). Как мы видели в примерах, нормализация $\widetilde{C}$ кривой C может быть как связной гладкой кривой, так и несвязным объединением гладких кривых. Образ каждой компоненты связности при отображении нормализации называется *неприводимой компонентой* кривой C.

Пример 1.4. При $t \neq 0$ кривые семейства $y^2 = x^3 + x^2 + t$ являются гладкими плоскими эллиптическими кривыми. При $t = 0$ кривая этого семейства особая, имеющая простое самопересечение в начале координат. Ее нормализация — рациональная кривая, и сама вырожденная кубика получена склейкой двух точек этой рациональной кривой. Как мы увидим ниже, предельную кривую естественно также считать эллиптической.

Формальное определение нодальной кривой требует определения кольца мероморфных функций на ней (это нужно, скажем, для того, чтобы отличать трансверсальное самопересечение от касания). Определим кольцо мероморфных функций на нодальной кривой как кольцо мероморфных функций на ее нормализации, принимающих одинаковые конечные значения обоих прообразах любой двойной точки.

Упражнение 1.5. Дайте определение точки самокасания кривой в терминах (локального) кольца мероморфных функций на ней.

Условие стабильности нодальной кривой накладывает на нее некоторые ограничения. Эти ограничения состоят в следующем:

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три прообраза двойных точек;
- на каждой эллиптической компоненте нормализации должен быть по меньшей мере один прообраз двойной точки.

Действительно, группа автоморфизмов кривой бесконечна только если ее род меньше двух, и компоненты таких родов должны быть стабилизированы прообразами двойных точек.

Теперь мы можем дать определение стабильной кривой с отмеченными точками.

Определение 1.6. *Стабильной кривой с отмеченными точками* называется нодальная кривая с отмеченными точками, точки самопересечения которой не совпадают с отмеченными точками и группа автоморфизмов которой конечна.

Последнее требование означает, что

- на каждой рациональной компоненте нормализации стабильной нодальной кривой должно быть по меньшей мере три специальные точки (т.е. точки, являющиеся отмеченными или прообразами двойных точек);
- на каждой эллиптической компоненте нормализации должна быть по меньшей мере одна специальная точка.

2 Род нодальной кривой

Для того, чтобы иметь возможность доклеивать пространство модулей кривых рода g стабильными кривыми, мы должны знать, что такое род нодальной кривой. Понятие рода нужно ввести таким образом, чтобы при вырождениях гладких кривых род сохранялся. Одна из возможностей состоит в том, чтобы определить пространство голоморфных 1-форм на нодальных кривых. Тогда родом кривой будет размерность этого пространства.

Ясно, что голоморфная 1-форма на нодальной кривой должна быть голоморфной в гладких точках этой кривой. Осталось предписать ее поведение в особых точках. Разрешим такой 1-форме иметь полюса первого порядка в двойных точках на каждой ветви и потребуем, чтобы сумма вычетов в этих точках обращалась в нуль.

Итак, *геометрическим родом* нодальной кривой называется размерность пространства мероморфных 1-форм на ее нормализации, все полюса которых расположены в прообразах двойных точек, причем порядок каждого полюса равен единице и сумма вычетов на двух прообразах одной двойной точки равна нулю.

Типичным примером — который, собственно, и приводит к данному выше определению, — служит следующий. Рассмотрим однопараметрическое семейство рациональных кривых на плоскости $xy = t$. Ограничение 1-формы dx/x на кривую этого семейства задает мероморфную 1-форму на ней, имеющую два полюса первого порядка — оба на бесконечности. Это ограничение совпадает с ограничением на ту же кривую 1-формы $-dy/y$ (действительно, разность этих 1-форм равна $d(xy)/xy$, и ее ограничение на кривую тождественно равно нулю). При обращении параметра t в нуль кривая вырождается в две координатные прямые, а предельное значение 1-формы выглядит так: на прямой $y = 0$ она совпадает с dx/x, а на прямой $x = 0$ — с 1-формой $-dy/y$. В точке пересечения вычеты у этих 1-форм противоположны.

Вот другое определение того же понятия. Окрестность двойной точки изоморфна паре дисков, пересекающихся по одной точке. Граница этой окрестности — пара окружностей. Сгладим эту пару дисков, превратив ее в конус, и поступим так с каждой двойной точкой кривой. В результате получим гладкую кривую. Ее род и называется родом соответствующей нодальной кривой.

Упражнение 2.1. Докажите, что эти два определения рода нодальной кривой совпадают.

Упражнение 2.2. Докажите, что если нодальная кривая получена склейкой пары точек гладкой кривой рода g, то ее род равен $g + 1$. То же верно и для склейки пары точек *нодальной* кривой рода g.

Упражнение 2.3. Найдите род нодальной кривой, полученной склейкой двух нодальных кривых рода, соответственно g_1 и g_2 по паре точек.

Сопоставим нодальной кривой граф, вершины которого — неприводимые компоненты кривой, причем две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие компоненты пересекаются. Каждую вершину пометим родом нормализации соответствующей этой вершине компоненты. Такой граф называется *модулярным графом* кривой.

Упражнение 2.4. Докажите, что если нодальная кривая имеет род нуль, то она представляет собой дерево проективных прямых.

Упражнение 2.5. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 2 и 3.

Вершины модулярных графов нодальных кривых с отмеченными точками принято помечать именами расположенных на соответствующих неприводимых компонентах отмеченных точек.

Пример 2.6. Теперь мы можем указать точки, компактифицирующие пространство $\mathcal{M}_{0;4}$. Каждая из них представляет собой пару проективных прямых, пересекающихся в одной точке. Четыре отмеченные точки распределяются по две по неприводимым компонентам такой нодальной кривой, и всего имеется три способа их распределения, отвечающих трем компактифицирующим точкам:

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\},\quad \{\{x_1,x_3\},\{x_2,x_4\}\},\quad \{\{x_1,x_4\},\{x_2,x_3\}\}.$$

Упражнение 2.7. Нарисуйте модулярные графы всех стабильных кривых рода 0 с тремя, четырьмя и пятью отмеченными точками и рода 1 с одной, двумя и тремя отмеченными точками.

Упражнение 2.8. Верно ли, что порядок группы автоморфизмов стабильной кривой рода g (быть может, с отмеченными точками) не может превышать $84(g-1)$?

3 Вырождения гладких кривых

Точками компактифицированного (по Делиню–Мамфорду) пространства модулей кривых рода g с n отмеченными точками служат классы биголоморфной эквивалентности стабильных кривых. Если компактное пространство модулей стабильных кривых $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ действительно существует, то оно обладает следующим свойством: любой голоморфный морфизм проколотого диска в $\overline{\mathcal{M}}_{g;n}$ продолжается в выколотую точку. Это означает, что любое голоморфное семейство гладких кривых над проколотым диском доклеивается стабильной кривой. Посмотрим, как это происходит на практике.

Пример 3.1. Пусть C — кривая рода $g \geq 1$, p — фиксированная точка этой кривой, q — переменная точка этой кривой. Обозначим через C_q кривую C с отмеченными точками p и q. Нас интересует, к какой точке пространства модулей стремится эта кривая при $q \to p$.

Рассмотрим двумерную поверхность $C \times D$ — прямое произведение кривой C на комплексный диск (которую мы интерпретируем как тождественное одномерное семейство кривых). Диск D отождествляется с окрестностью точки p в кривой C, и его точки — это возможные положения точки q. В этом расслоении выделены два сечения — постоянное, соответствующее точке p, и переменное, отвечающее точке q. Эти два сечения пересекаются в единственной точке — над центром диска.

Для построения стабильного предела этого семейства выполним *раздутие* поверхности $C \times D$ в точке пересечения сечений. В результате в эту поверхность будет вклеена проективная прямая, а сечения будут пересекать ее трансверсально. Эта прямая, пересекает слой над выколотой точкой трансверсально. Вместе со слоем оно образует предельную кривую. Прообразы сечений при раздутии оставляют следы на вклеенной проективной прямой. Эти следы есть предельные положения точек p и q. Точное их расположение не имеет значения: все тройки точек на проективной прямой эквивалентны.

Итак, предельным стабильным элементом нашего семейства является кривая C, в точке p которой приклеена проективная прямая, содержащая обе отмеченные точки. Возникает вопрос, нельзя ли с помощью другой конструкции получить другой предел. Единственность предела гарантируется существованием пространства модулей стабильных кривых.

Замечание 3.2. Раздутие — стандартный прием разрешения особенностей в алгебраической геометрии. Раздутие можно выполнять в многообразии любой размерности вдоль подмногообразия, коразмерность которого не меньше двух. Нас будет интересовать только случай раздутия двумерной поверхности вдоль точки. Если X — двумерная поверхность и $p \in X$, то раздутием называется пара, состоящая из двумерной поверхности Y и голоморфного отображения $\sigma_p : Y \to X$, которое является изоморфизмом над $X \setminus \{p\}$, причем прообраз точки p является проективной прямой. Эту проективную прямую следует понимать как проективизацию касательной плоскости T_pX. В локальных координатах x, y в окрестности точки p и u, v в окрестности ее прообраза раздутие записывается в виде $x = uv$, $y = v$. Видно, что при таком отображении всякая прямая $x = ay$ является образом прямой $u = a$, т.е. прямым, пересекающимся в точке p, при раздутии соответствуют параллельные прямые.

Упражнение 3.3. Как выглядит стабильный предел однопараметрического семейства кривых рода $g + 1$, $g \geq 1$, полученных из данной гладкой кривой C рода g склейкой постоянной точки p с переменной точкой q при стремлении точки q к точке p?

4 Плюриканонические вложения стабильных кривых

Упражнение 4.1. Докажите формулу Римана–Роха для стабильных кривых.

Упражнение 4.2. Проверьте, что степень канонического класса на стабильной кривой рода g равна $2g - 2$.

Упражнение 4.3. Найдите размерность пространства голоморфных сечений а) канонического расслоения; б) n-канонического расслоения на стабильной кривой.

Упражнение 4.4. Докажите, что 5-каноническое отображение стабильной кривой является вложением.