2 января 2004

ЗАДАЧИ К СПЕЦКУРСУ «AD-НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ИДЕАЛЫ В БОРЕЛЕВСКИХ ПОДАЛГЕБРАХ» (ОСЕНЬ 2003)

Д.И. ПАНЮШЕВ

Независимый Московский университет, Большой Власьевский пер. 11
121002 Москва, Россия
e-mail: `panyush@mccme.ru`

Основные обозначения:

$\mathfrak{g}$ – простая комплексная алгебра Ли. Зафисируем борелевскую подалгебру $\mathfrak{b}$ и картановскую подалгебру $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{b}$. Тогда Δ – система корней пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ и W – обычная группа Вейля. Если $\alpha \in \Delta$, то $\mathfrak{g}_\alpha$ – соответствующее корневое подпространство в $\mathfrak{g}$.

Δ^+ – множество положительных корней, соответствующее $\mathfrak{b}$;

θ – старший корень в Δ^+;

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ – система простых корней в Δ^+.

$e_1, e_2, \dots, e_p$ – показатели и h – число Кокстера группы W.

Положим $V := \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \oplus_{i=1}^p \mathbb{R}\alpha_i$ и обозначим через $(\ ,\ )$ W-инвариантное скалярное произведение в V. Как обычно, $\mu^\vee = 2\mu/(\mu,\mu)$ – это кокорень, соответствующий $\mu \in \Delta$.

$\mathcal{C} = \{x \in V \mid (x, \alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in \Pi\}$ – открытая доминантная камера Вейля.

$\mathcal{A} = \{x \in V \mid (x, \alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in \Pi \ \ \& \ (x, \theta) < 1\}$ – фундаментальный альков.

$Q^+ = \{\sum_{i=1}^p n_i\alpha_i \mid n_i = 0, 1, 2, \dots\}$ и $Q^\vee = \oplus_{i=1}^p \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset V$ – решетка кокорней;

$P^\vee = \{x \in V \mid (x, \mu) \in \mathbb{Z} \ \forall \mu \in \Delta^+\}$ – решетка ковесов.

Положим $\widehat{V} = V \oplus \mathbb{R}\delta \oplus \mathbb{R}\lambda$ и продолжим скалярное прозведение $(\ ,\ )$ на $\widehat{V}$ таким образом что $(\delta, V) = (\lambda, V) = (\delta, \delta) = (\lambda, \lambda) = 0$ and $(\delta, \lambda) = 1$. Получится невырожденная билинейная форма. Далее,

$\widehat{\Delta} = \{\Delta + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \widehat{V}$ – множество аффинных корней,

$\widehat{\Delta}^+ = \Delta^+ \cup \{\Delta + k\delta \mid k \ge 1\}$ – множество положительных аффинных корней и

$\widehat{\Pi} = \Pi \cup \{\alpha_0\}$ – соответствующее множество простых корней. Здесь $\alpha_0 = \delta - \theta$.

Аффинная группа Вейля W – это группа линейных преобразований пространства $\widehat{V}$, порожденная ортогональными отражениями $s_i := s_{\alpha_i}$ $(0 \le i \le p)$. То есть, по построению, билинейная форма $(\ ,\ )$ на $\widehat{V}$ является $\widehat{W}$-инвариантной.

Обозначение $\beta > 0$ (соотв. $\beta < 0$) – это сокращение для $\beta \in \widehat{\Delta}^+$ (соотв. $\beta \in -\widehat{\Delta}^+$).

Длина элемента $\widehat{W}$ относительно системы образующих $s_0, s_1, \dots, s_p$ обозначается через ℓ. Ограничив ℓ на W, мы получим длину элемента в W. Для любого $w \in \widehat{W}$, положим

$$N(w) = \{\alpha \in \widehat{\Delta}^+ \mid w(\alpha) \in -\widehat{\Delta}^+\}.$$

Как хорошо известно, $\#N(w) = \ell(w)$ and $N(w)$ – *би-выпуклое* подмножество. Более того, соответствие $w \mapsto N(w)$ дает биекцию между элементами $\widehat{W}$ и конечными би-выпуклыми подножествами в $\widehat{\Delta}^+$.

$\widehat{\mathcal{H}}_\nu$ – гиперплоскость в $\widehat{V}$, ортогональная корню $\nu \in \widehat{\Delta}^+$. Если $\mu \in \Delta^+$ и $k \in \mathbb{Z}$, то $\mathcal{H}_{\mu,k} = \{x \in V \mid (x,\mu) = k\}$.

Группа $\widehat{W}$ также естественно изоморфна группе аффинно-линейных преобразований пространства V, порожденной (аффинными) отражениями $s_{\mu,k}$. Здесь $s_{\mu,k}(x) = x - ((x,\mu) - k)\mu^\vee$. Аффинно-линейное действие группы $\widehat{W}$ обозначаентся через $*$, то есть $(w,x) \mapsto w * x$. Наконец, $\widehat{W} \simeq Q^\vee \rtimes W$.

$\widehat{W}_{dom}$, $\widehat{W}_{min}$, $\widehat{W}_{max}$ – подмножества доминантных, минимальных и максимальных элементов в $\widehat{W}$.

Задачи

1) Вычислить число ad-нильпотентных идеалов в $\mathfrak{sp}_{2n}$ с помощью принципа отражения. (Указание: использовать представление идеалов в виде сдвинутых диаграмм Ферре.)
2) Пусть $\mathfrak{c}$ – произвольный (геометрический) идеал в $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c} = [\mathfrak{c}, \mathfrak{u}^+] \oplus \tilde{\mathfrak{c}}$ – единственное $\mathfrak{t}$-инвариантное разложение. Доказать, что γ является образующей идеала тогда и только тогда, когда γ – вес подпространства $\tilde{\mathfrak{c}}$.
3) Доказать что корневое подпространство $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Pi$, <u>не</u> лежит в нормализаторе идеала $\mathfrak{c}$ тогда и только тогда, когда корень α обладает свойством: найдется такой $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{c})$, что $\gamma - \alpha \in \Delta^+ \cup \{0\}$.
4) Пусть $\mu \in \Delta^+$, $k > 0$, $l \ge 0$. Пусть $E = \{x \in \widehat{V} \mid (x,\lambda) = 1\}$. Обозначим через π естественную проекцию $E \to V$. Если $w \in \widehat{W}$, то $\overline{w} = \pi(w|_E)$ – индуцированное преобразование пространства E. Доказать, что
   $\pi(\widehat{\mathcal{H}}_{-\mu+k\delta} \cap E) = \mathcal{H}_{\mu,k}$; $\quad \overline{s_{-\mu+k\delta}} = s_{\mu,k}$.
   $\pi(\widehat{\mathcal{H}}_{\mu+l\delta} \cap E) = \mathcal{H}_{\mu,-l}$; $\quad \overline{s_{\mu+l\delta}} = s_{\mu,-l}$.
5) Пусть $\mu \in \Delta^+$, $k > 0$, $l \ge 0$. Доказать:
   $w(-\mu + k\delta) < 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H}_{\mu,k}$ разделяет $\mathcal{A}$ и $w^{-1} * \mathcal{A}$.
   $w(\mu + l\delta) < 0 \Longleftrightarrow \mathcal{H}_{\mu,-l}$ разделяет $\mathcal{A}$ и $w^{-1} * \mathcal{A}$.
6) Пусть $u, v \in W$. Тогда $\ell(uv) = \ell(u) + \ell(v) \iff N(u) \cap N(v^{-1}) = \varnothing$. При этом $N(uv) = N(v) \sqcup v^{-1}{\cdot}N(u)$.
7) Пусть $w = v{\cdot}t_r$, $v \in W$, $r \in Q^\vee$. Вывести формулы для линейного действия w на $\widehat{V}$ в терминах этого разложения.
8) Если $w = v{\cdot}t_r \in \widehat{W}_{dom}$, то $r \in -\overline{\mathcal{C}}$.
9) Для всех простых алгебр Ли указать единственную вершину симплекса D_{min}, лежащую в $Q^\vee$. Здесь $D_{min} = \{x \in V \mid (x,\alpha) \ge -1\ \forall \alpha \in \Pi\ \ \&\ \ (x,\theta) \le 2\}$.
10) Для всех простых алгебр Ли указать единственную вершину симплекса D_{max}, лежащую в $Q^\vee$. Здесь $D_{max} = \{x \in V \mid (x,\alpha) \le 1\ \forall \alpha \in \Pi\ \ \&\ \ (x,\theta) \ge 0\}$.
11) Доказать, что Π – это единственная антицепь из $\operatorname{rk}\mathfrak{g}$ элементов.

12) Пусть I – строго положительный (комбинаторный) идеал и $w = w_{max}(I) \in \widehat{W}$ – соответствующий (максимальный) элемент. Доказать:
    γ – максимальный корень в $\Delta^+ \setminus I \iff w(\delta - \gamma) \in \widehat{\Pi}$.
13) Пусть $w = v{\cdot}t_r \in W_{min}$. Доказать, что идеал I_w абелев тогда и только тогда, когда $v(r) \in D_{ab}$, где $D_{ab} = \{x \in V \mid -1 \le (x,\gamma) \le 2 \ \forall\gamma \in \Delta^+\}$.
14) Нарисовать конфигурацию Ши для $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{G}_2$ и указать идеалы, соответствующие доминантным областям.
15) Пусть f – индекс связности системы Δ. Доказать, что
    $f{\cdot}\#(D_{ab} \cap Q^\vee) = \#(D_{ab} \cap P^\vee)$.
16) Пусть $\tau : (\mathfrak{Ab} \setminus \varnothing) \to \Delta_l^+$ – отображение, сопоставляющее нетривиальному абелеву идеалу его корешок (rootlet). Если все корни в Δ одной длины и $\tau(I) \notin \Pi$, то найдется по крайней мере 2 максимальных абелевых идеала, содержащих I.
17) Положим $\mathfrak{Ab}_\mu = \tau^{-1}(\mu)$, $\mu \in \Delta_l^+$. Доказать единственность минимального элемента в $\mathfrak{Ab}_\mu$.
18) Доказать единственность максимального элемента в $\mathfrak{Ab}_\mu$, предполагая, что единственность минимального элемента уже доказана.
19) Пусть $w_\mu \in W$ – единственный элемент наименьшей длины, переводящий θ в $\mu \in \Delta_l^+$. Положим $\tilde{w}_\mu = w_\mu s_0 \in \widehat{W}$. Доказать, что $I_{\tilde{w}_\mu}$ – минимальный элемент в $\mathfrak{Ab}_\mu$.
20) Доказать, что $I_{\tilde{w}_\mu} \subset \{\nu \in \Delta^+ \mid (\nu,\theta) > 0\}$.
21) Доказать обе формулы обращения Мёбиуса.
22) Пусть $\chi(\mathcal{A},t)$ – характеристический многочлен конфигурации. Если $(\mathcal{A},\mathcal{A}',\mathcal{A}'')$ – тройка конфигураций, то $\chi(\mathcal{A},t) = \chi(\mathcal{A}',t) - \chi(\mathcal{A}'',t)$.
23) Подсчитать число самодвойственных идеалов в $\mathfrak{sl}_n$.
24) Конфигурация $\mathrm{Cat}_s^m(\mathfrak{g})$ состоит из гиперплоскостей
    $\mathcal{H}_{\mu,k}$ ($\mu \in \Delta_s^+,\ k = -m, -m+1, \dots, m$) и $\mathcal{H}_{\nu,0}$ ($\nu \in \Delta_l^+$). Пользуясь определением, вычислить непросредственно $\chi(\mathrm{Cat}_s^m(\mathbf{G}_2),t)$ и $\chi(\mathrm{Cat}_s^m(\mathbf{C}_2),t)$ при $m \le 2$. Предложить формулу для $\chi(\mathrm{Cat}_s^m(\mathbf{G}_2),t)$ для любого m.
25) Доказать, что если $\Delta \in \{\mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p, \mathbf{F}_4\}$, то

$$\chi(\mathrm{Cat}_s^m(\Delta),t) = \prod_{i=1}^{p}(t - mg - e_i)\ .$$

    Здесь g – сумма коэффициентов θ при коротких простых корнях.
26) Рассмотрим отображение, сопоставляющее абелеву идеалу его нормализатор в $\mathfrak{g}$. Доказать, что оно является биекцией для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ или $\mathfrak{sp}_{2n}$.