Алгебро-геометрический словарик

1°. Вычислите: **а)** $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ **б)** $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ **в)** $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$
г) $k[x]\underset{k}{\otimes}k[y]$ **д)** $k[x,y]\underset{k[x]}{\otimes}k[x,z]$ **е)** $(A/I)\underset{A}{\otimes}I$, где $I\subset A$ является идеалом кольца A.

2. Опишите многообразие $V(J)\subset\mathbb{A}^3$ и идеал $I(V(J))\subset\mathbb{C}[x,y,z]$ для идеалов
а) $J=(xy,(x-y)z)$ **б)** $J=(xy+yz+zx,x^2+y^2+z^2)$

3. Для пары идеалов $I,J\in k[x_1,\dots,x_n]$ положим $K=\{ab\,|\,a\in I,\,b\in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый K. Верно ли, что: **а)** $K=IJ$ и так идеал, **б)** $K=I\cap J$, **в)** $V(IJ)=V(I\cap J)$, **г)** $I\cap J$ идеал, **д)** $\sqrt{IJ}=\sqrt{I\cap J}$, **е)** $\sqrt{IJ}=\sqrt{I}\sqrt{J}$?

4. Докажите, что полином f делит нуль в $k[x_1,\dots,x_n]/(g_1,g_2,\dots,g_m)$, если и только если $V(f)$ содержит неприводимую компоненту многообразия $V(g_1,g_2,\dots,g_m)$.

5. Верно ли, что множество нильпотентов произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов?

6 (топология Зарисского). Покажите, что множества нулей $V(I)$ всевозможных идеалов $I\subset k[X]$ составляют систему замкнутых множеств некоторой квазикомпактной[1] топологии на аффинном алгебраическом многообразии X.

7. Всегда ли **а)** главное **б)** произвольное открытое подмножество аффинного алгебраического многообразия является аффинным алгебраическим многообразием?

8. Докажите, что две функции $f,g\in k[X]$ на неприводимом аффинном многообразии X совпадают[2] тогда и только тогда, когда они принимают одинаковые значения во всех точках некоторого непустого открытого подмножества $U\subset X$.

9. Верно ли, что проекция любой гиперповерхности $V(f)\subset\mathbb{A}^n$ из любой точки $p\notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H\not\ni p$ доминантна?

10. Верно ли, что любой доминантный морфизм неприводимых алгебраических многообразий $X\xrightarrow{\varphi}Y$ раскладывается в композицию замкнутого вложения в тривиальное аффинное расслоение: $X\xhookrightarrow{\psi}Y\times\mathbb{A}^m$ и проекции: $Y\times\mathbb{A}^m\xrightarrow{\pi}Y$.

11. Опишите все направления, вдоль которых параллельная проекция гиперболы $V(xy-1)\subset\mathbb{A}_2$ на первую координатную ось $\mathbb{A}_1\subset\mathbb{A}_2$ является конечным морфизмом.

12 (конечность слоёв конечного морфизма). Верно ли, что:
а) $\operatorname{Specm}A$ конечен $\iff$ k-алгебра A конечномерна как векторное пространство над k;
б) все слои конечного морфизма аффинных многообразий конечны;
в) любой морфизм аффинных многообразий с конечными слоями конечен?

13 (лемма Нётер о нормализации). Постройте конечный сюрьективный морфизм произвольной гиперповерхности $V(f)\subset\mathbb{A}^n$ на некоторую гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1}\subset\mathbb{A}^n$.

14. Пусть X аффинно, а $k[X]$ факториально[3]. Верно ли, что всякое подмногообразие коразмерности 1 в X является гиперповерхностью[4]?

15. Объясните, как по уравнениям алгебраических многообразий $X\subset\mathbb{A}^n$, $Y\subset\mathbb{A}^m$ написать уравнения, задающие $X\times Y$ как аффинное алгебраическое многообразие в $\mathbb{A}^{n+m}$ и докажите, что $X\times Y$ неприводимо, если X и Y неприводимы.

---

[1] т.е. такой, что всякое открытое покрытие X содержит конечное подпокрытие
[2] как элементы кольца $k[X]$
[3] утешительный вариант: пусть $X=\mathbb{A}^n$
[4] т.е. имеет вид $V(f)$ для некоторого $f\in k[X]$