Алгебро-геометрический словарик (продолжение)

1 (свойства конечных морфизмов). Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — конечный морфизм аффинных многообразий, и $Z \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Докажите, что:
а) морфизм $\varphi|_Z : Z \longrightarrow Y$ тоже конечен; **б)** $\varphi(Z)$ замкнут в Y
в) если X неприводимо, то $Z \neq X \Rightarrow \varphi(Z) \neq Y$.

2 (размерности подмногообразий). Докажите, что: **а)** $\dim_x \mathbb{A}_n = n \quad \forall\, x \in \mathbb{A}_n$;
б) размерность любой гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}_n$ равна $n-1$ (разумеется, $f \neq \text{const}$);
в) то же, но для любого n-мерного неприводимого аффинного многообразия X вместо $\mathbb{A}_n$;
г) $\dim(X \cap Y) \geqslant \dim X + \dim Y - n$ для любых подмногообразий $X, Y \subset \mathbb{A}_n$;
д) $X \cap Y \neq \varnothing$ для замкнутых $X, Y \subset \mathbb{P}_n$, если $\dim X + \dim Y \geqslant n$;
е) $\dim V(f_1, f_2, \dots, f_m) \geqslant \dim X - m$ для любого собственного идеала $(f_1, f_2, \dots, f_m) \subset k[X]$;
ж) $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

3 (размерность слоёв морфизмов). Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — регулярный доминантный[1] морфизм алгебраических многообразий. Докажите что: **а)** $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant \dim X - \dim Y \;\forall\, x \in X$
б) имеется непустое открытое $U \subset Y$ над которым $\dim \varphi^{-1}(y) = \dim X - \dim Y \;\forall\, y \in U$.

4 (теоремы Шевалле). Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — регулярный морфизм алгебраических многообразий. Докажите, что:
а) (полунепрерывность) $X_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geqslant k \,\}$ замкнуты в $X \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$;
б) (конструктивность) $\varphi(X) \subset Y$ получается из конечного числа открытых и замкнутых множеств конечным числом операций объединения, пересечения и взятия дополнения множества до подмножества;
в) изолированные точки слоёв φ составляют открытое подмножество в X;
г) если φ замкнут, то $Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant k \,\}$ замкнуты в $Y \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$.

5 (простейший критерий неприводимости). Пусть морфизм $X \xrightarrow{\varphi} Y$ замкнут, а все его слои неприводимы и имеют одну и ту же размерность. Тогда неприводимость Y влечёт за собой неприводимость X.

6 (лемма Гаусса). Дано расширение колец $A \subset B$. Докажите, что если в $B[x]$ три многочлена со старшим коэффициентом 1 удовлетворяют соотношению $fg = h$, то все коэффициенты h целы над A тогда и только тогда, когда над A целы все коэффициенты и у f и у g.

7 (нормальность). Кольцо A без делителей нуля называется *нормальным*, если в его поле частных нет не лежащих в A элементов, целых над A. Аффинное многообразие X нормально, если нормально кольцо $k[X]$ (в частности такое X неприводимо).
а°) Докажите, что $\mathbb{Z}$, $k[x_1, \dots, x_n]$, и вообще любое факториальное кольцо нормальны.
б) (минимальный многочлен) Пусть A — нормальное кольцо, K — поле его частных, и f — алгебраичный над K элемент из какой-либо K-алгебры. Верно ли, что коэффициенты минимального многочлена для f над K лежат в A?
в) Пусть $X \xrightarrow{\varphi} Y$ — конечный сюрьективный морфизм алгебраических многообразий, причём Y нормально, и $f \in k[X]$ — произвольная регулярная функция на X. Докажите, что морфизм $\varphi \times f : X \xrightarrow{x \mapsto (\varphi(x), f(x))} Y \times \mathbb{A}_1$ конечно отображает X на $V(\mu_f)$, где $\mu_f \in k[Y][t] = k[Y \times \mathbb{A}_1]$ — минимальный многочлен для f над (полем частных нормального кольца) $k[Y]$.
г*) Докажите, что всякий конечный сюрьективный морфизм на нормальное многообразие открыт.

[1] т. е. такой, что образ каждой неприводимой компоненты X плотен в Y