1. Изоморфна ли группа (по умножению) матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, где a, b, c — вычеты по модулю 2, группе симметрий квадрата? Почему?

2. Пусть J — (собственный) идеал в кольце $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Докажите, что существует точка $a \in [0,1]$, такая что для каждой функции $f \in J$ выполнено $f(a) = 0$.

3. Обозначим через $\mathbb{H}$ кольцо кватернионов. Отображение $\varphi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется *линейной функцией*, если найдутся такие $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{H}$, что $\varphi(x) = \sum_{l=1}^{k} a_l x b_l$.

(**а**) Является ли линейной функцией сопряжение: $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$?

(**б**) Проверьте, что линейные функции образуют векторное пространство над $\mathbb{R}$, и найдите его базис и размерность.

4. Докажите, что $\left(\frac{d}{dt}\det(A + tB)\right)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}(\widehat{A}B)$ ($\widehat{A}$ — присоединённая матрица).

5. Разложите в прямую сумму циклических абелевых групп факторгруппу группы $\mathbb{Z}^3$ по подгруппе векторов, у которых сумма первой и второй координаты делится на 7, а сумма всех координат чётна.

6. Пусть вещественные матрицы A и B подобны над $\mathbb{C}$, т. е. существует комплексная матрица C, такая что $C^{-1}AC = B$. Докажите, что эти матрицы подобны и над $\mathbb{R}$.

7. Дана комплексная 2×2-матрица A. Рассмотрим линейный оператор на пространстве 2×2-матриц, переводящий матрицу X в матрицу $AX - XA$. Найдите жорданову нормальную форму этого оператора.

Работы нужно сдать в учебную часть не позже 17^{30} четверга 4 марта. На работе напишите фамилию и имя, а также «Домашний экзамен по алгебре, 1 курс».

Все ответы должны быть обстоятельно обоснованы. Критерии оценок: 6 задач — «5», 5 задач — «4», 4 задачи — «3». Удачи!