Жорданова нормальная форма и её применения

Докажем сформулированную на прошлой лекции теорему единственности.

Теорема 1. Пусть конечнопорождённый модуль над евклидовым кольцом разложен в прямую сумму свободных и примарных циклических модулей. Тогда их набор определён однозначно с точностью изоморфизма.

Действительно, несвободная часть в разложении модуля M есть подмодуль $\operatorname{Tor} M$, состоящий из элементов $m \in M$, для которых найдётся $r \in R$: $rm = 0$. Поэтому свободная часть есть $M/\operatorname{Tor} M$ и её ранг не зависит от разложения.

Для доказательства про несвободную часть можно считать, что $M = \operatorname{Tor} M$. (Такие модули называют *конечными*.) В этом случае, для каждого разложения M в прямую сумму примарных циклических количество слагаемых, изоморфных $R/(p^m)$, равно $\dim p^{m-1}M/p^mM - \dim p^mM/p^{m+1}M$. Здесь модули $p^{m-1}M/p^mM$ и $p^mM/p^{m+1}M$ рассматриваются как линейные пространства над полем $R/(p)$.

Теперь можно решить задачу о нормальной форме линейного оператора. Поскольку неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ — это в точности $t - \lambda$ с $\lambda \in \mathbb{C}$, то всякий конечнопорождённый модуль над кольцом многочленов, который соответствует линейному оператору на конечномерном пространстве (как это объяснялось на прошлой лекции), есть прямая сумма модулей вида $\mathbb{C}[t]/((t-\lambda)^n)$ (в разложении в прямую сумму участвуют только примарные модули, т. к. свободный циклический модуль бесконечномерен над $\mathbb{C}$). Поскольку на таком модуле матрица умножения на t есть жорданов блок $n \times n$, обещанное утверждение доказано.

Упражнение 1. Сформулируйте теорему о классификации конечных абелевых групп.

Как находить жорданову форму оператора A на практике? Ясно, что на диагонали будут располагаться корни характеристического многочлена. Однако этими корнями структура жордановых блоков не определяется. Для каждого корня λ_i характеристического многочлена вычислим $n_{ij} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i)^j$. Пусть блоков $k \times k$ с числом λ_i всего m_{ik}. Тогда $\sum_k m_{ik} = n_{i1}$, $m_{i1} + 2\sum_{k>1} m_{ik} = n_{i2}$, $m_{i1} + 2m_{i2} + 3\sum_{k>2} m_{ik} = n_{i3}$, … Из этой системы легко найти числа m_{ik}. А для нахождения жорданова базиса надо решать большое количество систем линейных уравнений вида $Av = \lambda_i v$ или $Aw = \lambda_i w + v$.

Для чего используется жорданова форма? Самое простое применение состоит в вычислении функций от матрицы. Например, чтобы возвести матрицу A в степень, можно сначала найти для неё жорданов базис, тогда $A_J = C^{-1}AC$ (A_J — жорданова форма матрицы A, C — матрица перехода), поэтому $A_J^n = (C^{-1}AC)^n = C^{-1}A^nC$, откуда $A^n = CA_J^nC^{-1}$. Возводить же жорданову форму в степень просто: в силу блочной структуры надо уметь возводить в степень жорданов блок $J_n(\lambda)$ размера $n \times n$. Для того, чтобы этому научиться, обозначим через N матрицу, у которой на диагонали, соседней с главной, стоят единицы, а остальные матричные элементы равны нулю. (Это матрица умножения на $t - \lambda$ в базисе $1, t-\lambda, (t-\lambda)^2, \dots, (t-\lambda)^{n-1}$ векторного пространства $\mathbb{C}[t]/((t-\lambda)^n)$.) Тогда у матрица N^k на диагонали на расстоянии k от главной стоят единицы, а остальные матричные элементы равны нулю. Заметим теперь, что $J_n(\lambda) = (\lambda E + N)^k = \sum_{i=1}^k C_k^i \lambda^i N^{k-i}$. Поэтому возводить жорданов блок в степень совсем просто.

Следующее применение состоит в вычислении разных функций от матрицы: экспоненты, синуса, косинуса. В каждом из случаев надо суммировать ряд, в который эта функция разлагается в соответствии с курсом анализа.

Зачем нужна экспонента? — Для решения дифференциальных уравнений: если $x(t)$ — вектор-столбец, зависящий от времени, A — постоянная матрица, то дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = Ax$ с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет единственное (как известно из анализа; мы будем это использовать без доказательства) решение $x(t) = e^{At}x_0$. К системе такого вида сводится дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами; если $y^{(n)} = a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny$, то рассмотрим вектор – столбец

$$x = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$x' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \quad \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 1 \\ a_n & a_{n-1} & \ldots\ldots & \ldots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = Ax$$

для некоторой постоянной матрицы A (такая матрица A называется, кстати, *фробениусовым блоком*; поучительно вычислить её характеристический многочлен). Поэтому решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами сводится к вычислению экспоненты, а значит, возможно с помощью жордановой формы.

Дискретный аналог дифференциальных уравнений — разностные уравнения. Оказывается, что если дано рекуррентное соотношение k-ой степени $a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + \ldots + c_k a_n$, то нахождение явной формулы для членов последовательности $\{a_i\}$ по её начальному отрезку тоже может быть проделано с помощью жордановой нормальной формы. В самом деле, пусть

$$x_i = \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{i+k-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда рекуррентное соотношение означает, что

$$x_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{i+1} \\ a_{i+2} \\ \vdots \\ a_{i+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \quad \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & 1 \\ c_k & c_{k-1} & \ldots\ldots & \ldots & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{i+k-1} \end{pmatrix} = Ax_i.$$

Значит, $x_n = A^n x_0$, и задача сведена к возведению матрицы в степень.