Векторные (линейные) пространства.

Из школьного курса известно про операции над векторами на плоскости и в пространстве. Свойства этих операций мотивируют следующее определение.

Определение 1. *(Векторное* (или, как говорят, *линейное) пространство* над полем K — это множество V с двумя структурами: во-первых, V должно быть абелевой группой (нейтральный элемент обозначают 0, обратный к элементу $v \in V$ обозначают $-v$), во-вторых, должно быть правило умножения элементов множества V (векторы) на элементы поля K (числа): каждому вектору v и числу λ сопоставляется вектор λv, причём

- $\forall \lambda, \mu \in K,\ v \in V\ (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;
- $\forall \lambda, \mu \in K,\ v \in V\ (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
- $\forall \lambda \in K,\ v, w \in V\ \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.

Упражнение 1. Выведите из этих свойств, что $1v = v$ для любого $v \in V$.

Примеры. Векторы на плоскости или в пространстве из школьной евклидовой геометрии («свободные векторы», т. е. векторы, отличающиеся на сдвиг, отождествляются) образуют векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Всякое поле является векторным пространством над собой. Обобщением этого примера является *арифметическое векторное пространство* K^n — n-ки чисел с покоординатными сложением и умножением на число. В каком-то смысле это типичный пример векторного пространства.

Обозначим через e_i вектор арифметического векторного пространства K^n, у которого i-ая координата равна единице, а остальные координаты равны нулю. Система векторов $e_1, \ldots, e_n$ обладает двумя свойствами. Во-первых, любой вектор $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ можно записать в виде $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ (такая запись называется *линейной комбинацией* векторов $e_1, \ldots, e_n$), т. е. эта система векторов *полна*. [В физике и геометрии часто пишут индексы у координат сверху, а у векторов снизу (или наоборот ...) и применяют правило Эйнштейна, согласно которому по повторяющимся сверху и снизу индексам подразумевается суммирование.] Во-вторых, если $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$, то $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, т. е. векторы $e_1, \ldots, e_n$ *линейно независимы*. На всякий случай дадим общее определение.

Определение 2. Система векторов (не обязательно конечная) векторного пространства V полна, если всякий вектор из V представим в виде линейной комбинации конечного числа векторов этой системы. Система векторов линейно независима, если никакая линейная комбинация конечного числа векторов этой системы с коэффициентами, не все из которых нули, не равна нулю.

Определение 3. Если система векторов пространства V полна и векторы этой системы линейно независимы, то говорят, что эти векторы образуют *базис* пространства V.

Примеры. В пространстве K^2 система векторов $\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ полна, а любой ненулевой вектор линейно независим. В пространстве многочленов система $\{x^i \mid i \geqslant 0\}$ образует базис. Эта же система не образует базис в пространстве степенных рядов (но линейно независима).

Далее в этой лекции слово «пространство» означает «векторное пространство».

Теорема 1. Из любой полной системы векторов можно выбрать подсистему, образующую базис. (Особенно это наглядно в случае конечной системы: если есть линейная зависимость, то один из векторов можно выразить через другие, и поэтому он не нужен, а такое выбрасывание уменьшает число векторов. В противном случае нужно применять аксиому выбора в той или иной форме.)

Определение 4. Если в пространстве существует конечная полная система векторов, то пространство называется *конечномерным.*

Определение 5. Пусть есть система векторов пространства V. Все их линейные комбинации образуют подмножество в V, которое является векторным пространством над тем же полем, что и V. (Кстати, подмножество, которое само является векторным пространством, называют *подпространством.*) Оно называется *линейной оболочкой* данной системы векторов.

Теорема 2. Любую систему линейно независимых векторов конечномерного пространства можно дополнить до базиса этого пространства.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Теорема 3. Число векторов во всех базисах пространства V одинаково (его называют *размерностью пространства* V).

(Идея доказательства состоит в том, чтобы постепенно переделывать один базис — $e_1, \dots, e_n$ — в другой — $f_1, \dots, f_m$ — так, если мы уже знаем, что векторы $f_1, \dots, f_k, e_1, \dots, e_l$ образуют базис, то можно выразить вектор f_{k+1} через элементы этого базиса и заметить, что хотя бы один из e_i будет участвовать в этом выражении с ненулевым коэффициентом. После перенумерации можно считать, что это e_l. Но тогда можно заменить e_l на f_{k+1}, причём полученная система, как легко проверить, снова будет базисом. Можно считать, что $m < n$, но тогда в результате мы получим систему $f_1, \dots, f_m, e_1, \dots, e_{n-m}$, которая не может быть базисом.)

Определение 6. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис пространства V. Тогда для каждого вектора v однозначно определены его *координаты в базисе* $e_1, \dots, e_n$. А именно, нужно представить вектор в виде линейной комбинации векторов базиса. Коэффициент при e_i есть i-ая координата $\lambda_i(v)$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ функция $\lambda_i \colon V \to K$ обладает следующими свойствами:

- $\forall v, w \in V \; \lambda_i(v + w) = \lambda_i(v) + \lambda_i(w)$;
- $\forall \mu \in K,\; v \in V \; \lambda_i(\mu v) = \mu \lambda_i(v)$.

Это мотивирует следующее определение.

Определение 7. Функции $f \colon V \to K$, такие что

- $\forall v, w \in V \; f(v + w) = f(v) + f(w)$;
- $\forall \mu \in K,\; v \in V \; f(\mu v) = \mu f(v)$,

называются *линейными функциями, линейными функционалами, ковекторами.* На множестве таких функций есть естественная структура векторного пространства над полем K: по определению,

- $\forall v \in V \; (f + g)(v) = f(v) + g(v)$;
- $\forall \mu \in K,\; v \in V \; (\mu f)(v) = f(\mu v)$.

Это векторное пространство называется *двойственным*, или *сопряжённым* к пространству V. Оно обозначается $V^\wedge$ или (чаще) V^*.

Определение 8. *Аффинным пространством* называется множество E, на котором действует некоторое векторное пространство (т. е. имеется гомоморфизм абелевой группы векторов этого пространства в группу преобразований множества E), причём действие *транзитивно*, т. е. для любых двух элементов E (точек) существует преобразование (сдвиг на некоторый вектор), переводящее один из них в другой, и *свободно*, т. е. сдвиг на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек.