Формы объёма

Подробное разъяснение про замены базиса можно найти в записях предыдущей лекции. Ограничимся повторением утверждения про преобразование матрицы оператора при замене базиса.

Теорема 1. Пусть дан линейный оператор $A\colon V_1 \to V_2$, и пусть известна его матрица $A_{e,f}$ для базисов $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_m$ этих пространств. Пусть $e'_1, \ldots, e'_n$, $f'_1, \ldots, f'_m$ — другие базисы. Обозначим через B, C матрицы перехода (то, что матрица является матрицей перехода, означает, что если умножить эту матрицу на столбец из координат вектора в новом базисе, то получится столбец координат того же вектора в старом базисе) от базисов $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ к базисам $\{e'_i\}$, $\{f'_j\}$ соответственно. Тогда матрицу $A_{e',f'}$ этого оператора для новых базисов можно вычислить по формуле $A_{e',f'} = C^{-1}A_{e,f}B$.

Действительно, столбец вектора в старом базисе получается умножением матрицы перехода на столбец координат в новом базисе. Положим $w = A(v)$. Если для столбцов координат в старом базисе $w_{\text{ст}} = A_{e,f}v_{\text{ст}}$, то $Cw_{\text{нов}} = A_{e,f}Bv_{\text{нов}}$, откуда $A_{e',f'}v_{\text{нов}} = w_{\text{нов}} = C^{-1}A_{e,f}Bv_{\text{нов}}$, что и требовалось.

Упражнение 1. На лекции матрица перехода была определена так, что матрица в новом базисе вычислялась по формуле $A_{e',f'} = CA_{e,f}B^{-1}$. Выясните, почему так происходило.

Теперь мы будем изучать «формы объёма». Обозначим через $\operatorname{vol}(v, w)$ площадь параллелограмма, построенного на векторах v, w. Ясно, что $\operatorname{vol}(v, w) = 0$, если векторы линейно зависимы, и что $\operatorname{vol}(v_1 + v_2, w) = \operatorname{vol}(v_1, w) + \operatorname{vol}(v_2, w)$ — достаточно нарисовать эти свойства. Из этих двух свойств следует, что надо полагать $\operatorname{vol}(u, v) = -\operatorname{vol}(v, u)$. Действительно,

$$0 = \operatorname{vol}(u+v, u+v) = \operatorname{vol}(u+v, u) + \operatorname{vol}(u+v, v) = \\ = \operatorname{vol}(u, u) + \operatorname{vol}(v, u) + \operatorname{vol}(u, v) + \operatorname{vol}(v, v) = \operatorname{vol}(v, u) + \operatorname{vol}(u, v). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь случай произвольного векторного пространства. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем K.

Определение 1. *Формой объёма* называется функция vol на наборах n векторов, принимающая значения в K, для которой

- $\forall v_1, \ldots, v_n \in V, \lambda \in K$ $\operatorname{vol}(v_1, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_n) = \lambda \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n)$.
- $\forall v_1, \ldots, v'_i, v''_i, \ldots, v_n \in V$ $\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v'_i + v''_i, \ldots, v_n) = \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v'_i, \ldots, v_n) + \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v''_i, \ldots, v_n)$.
- Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы, то $\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = 0$.

Лемма 1. Форма объёма кососимметрична, т. е.

$$\forall v_1, \ldots, v_n \in V \ \ \operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\operatorname{vol}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

Доказательство не отличается от двумерного случая: нам важно лишь, что система векторов линейно зависима, если содержит два равных вектора.

Лемма 2. Любые две формы объёма пропорциональны, кроме того, существует ненулевая форма объёма. Иными словами, формы объёма образуют одномерное векторное пространство над K.

Эта лемма следует из следующей леммы.

Лемма 3. Форма объёма определяется своим значением на векторах некоторого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства V (которое можно задавать произвольно; это и даёт изоморфизм с одномерным векторным пространством).

Действительно, если векторы, на которых надо вычислить форму объёма, линейно зависимы, то она равна нулю, и поэтому мы знаем её значение. Если же они линейно независимы, то они также образуют базис. Действуя аналогично доказательству теоремы о корректности определения размерности, мы можем заменять векторы из этого на векторы из базиса e_i один за другим и убедиться, что форма объёма в результате выразится через значение на базисе e_i.

Упражнение 2. Доведите до конца это рассуждение.

Но можно действовать и более прямолинейно:

$$\operatorname{vol}\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i}e_{j_i}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}\Big) = \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \operatorname{vol}\Big(e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i}e_{j_i}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}\Big) = \ldots \\ \ldots = \sum_{j_1=1}^{n} \ldots \sum_{j_i=1}^{n} \ldots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \ldots a_{ij_i} \ldots a_{nj_n} \operatorname{vol}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_i}, \ldots, e_{j_n}) = \\ = \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{чётность } \sigma} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{i\sigma(i)} \ldots a_{n\sigma(n)}\right) \operatorname{vol}(e_1, \ldots, e_i, \ldots, e_n). \quad (2)$$

В последнем переходе использована кососимметричность формы объёма.