Определители

Напомним, что для формы объёма vol имеет место равенство

$$\mathrm{vol}(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1}e_{j_1},\dots,\sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i}e_{j_i},\dots,\sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n}e_{j_n}) =$$
$$\left(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\text{чётность }\sigma}a_{1\sigma(1)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)}\right) = \mathrm{vol}(e_1,\dots,e_i,\dots,e_n). \quad (1)$$

Поэтому существует ровно одна форма объёма, равная единице на данном базисе.

Определение 1. Многочлен от элементов матрицы $A = (a_{ij})$

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\text{чётность }\sigma}a_{1\sigma(1)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

называется *определителем* или *детерминантом* этой матрицы и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Таким образом, если $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$, то $\mathrm{vol}(v_1,\dots,v_n) = \det A\,\mathrm{vol}(e_1,\dots,e_n)$.

Теорема 1. $\det(AB) = \det A \det B$.

«Доказательство». Пусть $v_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e_j$, $w_k = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}v_l$. Тогда

$$\det(AB) = \frac{\mathrm{vol}(w_1,\dots,w_n)}{\mathrm{vol}(e_1,\dots,e_n)} = \frac{\mathrm{vol}(w_1,\dots,w_n)}{\mathrm{vol}(v_1,\dots,v_n)}\cdot\frac{\mathrm{vol}(v_1,\dots,v_n)}{\mathrm{vol}(e_1,\dots,e_n)} = \det A\det B,$$

что и требовалось.

Как надо улучшить это доказательство? Прежде всего, нужно рассмотреть случай матриц, не обязательно связывающих два базиса. Если $v_1,\dots,v_n$ — не базис, то эти векторы линейно зависимы, и $\det B = 0$. Кроме того, векторы $w_1,\dots,w_n$ суть линейные комбинации векторов $v_1,\dots,v_n$, и поэтому не могут образовывать базис, т. е. линейно зависимы. Значит, $\det(AB) = 0$. Поэтому в этом случае утверждение тоже верно. Теперь можно либо рассмотреть также случай $\det A = 0$, а можно вместо этого сказать совсем иначе.

Пусть $\det B \neq 0$. Рассмотрим $\dfrac{\det(AB)}{\det B}$ как функцию строк матрицы A. Это кососимметричная функция, линейная по каждому аргументу, и равная единице на единичной матрице. Такая функция обязательно совпадает с определителем: по сути, мы именно это уже доказывали.

Теорема 2. $\det({}^tA) = \det(A)$.

Действительно, нужно доказать, что

$$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\text{чётность }\sigma}a_{1\sigma(1)}\dots a_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\tau\in S_n}(-1)^{\text{чётность }\tau}a_{\tau(1)1}\dots a_{\tau(i)i}\dots a_{\tau(n)n}.$$

Заменим τ на σ^{-1}. Суммирование будет всё ещё по всем перестановкам, а знак будет правильный, поскольку чётность перестановки равна чётности обратной перестановки.

Теорема 3. (Свойства определителя)

- При перестановке двух строк или двух столбцов определитель меняет знак.
- Если к строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на число, то определитель не изменится.

Для строк это следует из свойств форм объёма. Для столбцов можно перейти к транспонированной матрице.

Упражнение 1. Проведите другое доказательство: найдите матрицы с определителем ±1, умножение на которые слева (справа) приводит к нужным преобразованиям матрицы A.

Теорема 4. (Разложение определителя по строке)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Действительно,

$$\sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\text{чётность } \tau} a_{\tau(1)1} \dots a_{\tau(i)i} \dots a_{\tau(n)n} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in S_n \colon \tau(1)=i} (-1)^{\text{чётность } \tau} a_{1i} a_{2\tau(2)} \dots a_{k\tau(k)} \dots a_{n\tau(n)},$$

и для завершения доказательства надо лишь заметить, что количество беспорядков с участием i в перестановке из последней суммы есть $i-1$.

Упражнение 2. Каков геометрический смысл разложения по строке?

Применим теперь доказанные утверждения для поиска обратной матрицы.

Пример 1. Обратная матрица к матрице $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ есть $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$.

Определение 2. *Алгебраическое дополнение элемента* a_{kl} матрицы $A = (a_{ij})$ вычисляется по следующему правилу: нужно вычеркнуть из матрицы k-ую строку и l-ый столбец (строку и столбец, содержащие a_{kl}), посчитать определитель полученной матрицы и умножить его на $(-1)^{k+l}$. Получающийся определитель называется минором A_{kl} матрицы A, а матрица $\widehat{A}$, ij-ый элемент которой равен $(-1)^{i+j}A_{ji}$ (обратите внимание на порядок индексов!!!), называется *присоединённой матрицей*.

Теорема 5. Произведение матрицы A и её присоединённой матрицы $\widehat{A}$ (в любом порядке) равно матрице, все диагональные элементы которой равны $\det A$, а все внедиагональные элементы равны нулю.

Действительно, заметим, что при всех $i = 1, \dots, n$ верно равенство $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \det A$ (это следует из формулы для разложения по строке и поведении определителя при перестановке строк), а при $k \neq i$ — и равенство $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} A_{ij} = 0$ (нужно применить формулу для разложения по строке определителя матрицы с двумя одинаковыми строками). Из этого следует, что произведение в одном из двух порядков такое, как нужно. Во втором случае надо изучать разложение по столбцу.

Следствие. Если $\det A = 0$, то обратной матрицы к матрице A не существует. Если $\det A \neq 0$, то обратная матрица равна $\frac{1}{\det A}\widehat{A}$.

Действительно, в первом случае можно получить противоречие из формулы определителя произведения, во втором случае — воспользоваться только что доказанной теоремой.

Вернёмся к формам объёма. Та форма объёма, которая на базисе $e_1, \dots, e_n$ равна единице, обозначается $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, где $x_1, \dots, x_n$ — координаты в этом базисе. Значок '$\wedge$' означает, что произведение антикоммутативно, т. е. $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$. Таким образом, с этими записями можно оперировать, как с многочленами, упорядочивая каждый одночлен. Отличие имеется в том, что таких выражений будет конечное число: ведь $dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i$, т. е. $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Пусть теперь A — матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $f_1, \dots, f_n$. Тогда $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$. Следующее вычисление будет использоваться в анализе при интегрировании функций многих переменных (сравните с формулой замены переменной в интеграле $dx = \frac{dx}{dt} dt$):

$$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_i \wedge \dots \wedge dx_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{dx_1}{dy_j} dy_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{dx_i}{dy_j} dy_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{dx_n}{dy_j} dy_j\right) =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, dy_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dy_j\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, dy_j\right) = (\det A)\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k \wedge \dots \wedge dy_n. \quad (3)$$