Билинейные и квадратичные формы

Замечание 1. Как известно, квадрат длины вектора есть сумма квадратов его координат: $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Скалярное произведение двух векторов есть сумма произведений координат: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Ясно, что квадрат длины и скалярное произведение связаны формулой $(x, y) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$ (теорема косинусов).

Определение 1. *Билинейная форма* на пространстве V над полем K — это функция $f\colon V \times V \to K$, такая что

- $\forall v, w \in V, \lambda \in K\ f(\lambda v, w) = f(v, \lambda w) = \lambda f(v, w)$;
- $\forall v_1, v_2, w \in V\ f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$;
- $\forall v_1, v_2, w \in V\ f(w, v_1 + v_2) = f(w, v_1) + f(w, v_2)$.

Если при этом $f(v, w) = f(w, v)$, то форма называется *симметричной.*

Замечание 2. *k-линейная форма — это функция от k векторов, линейная по каждому аргументу.*

Определение 2. Квадратичная форма на векторном пространстве — функция q, такая что для некоторой симметричной билинейной формы f верно равенство $q(x) = f(x, x)$.

Лемма 1. Если в поле K элемент 2 обратим (отличен от нуля), то форма f определяется однозначно: $f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$.

Действительно, если $q(x) = f(x, x)$, то

$$q(x+y) - q(x) - q(y) = f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y) = \\ = f(x, y) + f(y, x) = 2f(x, y). \quad (1)$$

Далее мы будем считать, что основное поле есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а билинейные формы симметричны, и не будем это специально оговаривать. (Задача классификации квадратичных форм может быть решена и, скажем, над $\mathbb{Q}$, но результат классификации весьма неочевиден.)

Заметим, что достаточно знать значения билинейной формы на базисных векторах:

$$f(x, y) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j).$$

Матрица $F = (f(e_i, e_j))$ называется матрицей билинейной формы в базисе $\{e_i\}$. Форма симметрична, если ${}^tF = F$. Если x, y — столбцы координат, то $f(x, y) = {}^t x F y$.

Пример 1. Квадрат расстояния — квадратичная форма; матрица соответствующей билинейной формы в стандартном базисе единична. Матрице $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ отвечает билинейная форма $x_1y_2+x_2y_1$ и квадратичная форма $2x_1x_2$.

Теорема 1. *Для каждой билинейной формы B над $\mathbb{R}$ существует базис $e_1, \ldots, e_{r_+}, e_{r_++1}, \ldots, e_{r_++r_-}, e_{r_++r_-+1}, \ldots, e_{r_++r_-+r_0}$ пространства V, такой что*

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} +1, & j = i \leqslant r_+, \\ -1, & r_+ < j = i \leqslant r_+ + r_-, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом набор чисел r_+, r_-, r_0 определён однозначно (его часто называют сигнатурой *формы).*

Замечание 3. Соответствующая квадратичная форма имеет в этом базисе вид

$$x_1^2 + \ldots + x_{r_+}^2 - x_{r_++1}^2 - \ldots - x_{r_++r_-}^2.$$

Определение 3. *Ядро* билинейной формы B — множество векторов v, таких что $B(v, w) = 0$ при всех $w \in V$. Обозначение: $\ker B$.

Пример 2. Для билинейной формы $\sum_{i=1}^n x_iy_i$ ядро — нулевое подпространство (ненулевой вектор не ортогонален себе). Для формы x_1y_1 ядро состоит из всех векторов с нулевой первой координатой. Для формы $x_1y_2+x_2y_1$ на двумерном пространстве ядро — нулевое подпространство, хотя есть векторы, которые ортогональны себе.

Лемма 2. *$\ker B$ — подпространство.*

Действительно, это множество является абелевой группой и замкнуто относительно умножения на число, т. к. форма билинейна.

Определение 4. Билинейная форма называется невырожденной, если её ядро — нулевое подпространство.

Замечание 4. Очевидно, что число r_0 в сигнатуре есть размерность ядра.

Как доказать существование базиса? Разберём два случая.

1) $\forall e \in V \;\; B(e, e) = 0$;
2) $\exists e \in V \;\; B(e, e) \neq 0$.

В первом случае по лемме 1 $\forall u, v \in V \;\; B(u, v) = 0$, и любой базис подходит. Во втором случае можно поделить вектор e на $\sqrt{|B(e, e)|}$ и получить вектор e_1, для которого $B(e_1, e_1) = \pm 1$. Рассмотрим *ортогональное дополнение вектора* e_1 — множество векторов v, таких что $B(e_1, v) = 0$. (Обозначение: $\langle e_1 \rangle^{\perp}$.)

Лемма 3. $\langle e_1\rangle^\perp$ — подпространство, причём $e \notin \langle e_1\rangle^\perp$.

Теперь можно провести индукцию по размерности. Ограничим форму на подпространство $\langle e_1\rangle^\perp$. По предположению существует базис этого подпространства, такой что в нём форма имеет требуемый вид. Осталось добавить к этому базису вектор e_1: получится базис всего пространства, ибо любой вектор можно единственным образом представить в виде суммы кратного e_1 и вектора, ортогонального e_1. В самом деле, если $v = ae_1 + w$, где $B(w, e_1) = 0$, то $B(v, e_1) = aB(e_1, e_1)$, и вектор $v - \frac{B(v,e_1)}{B(e_1,e_1)}$ действительно ортогонален вектору e_1.

Замечание 5. Отметим, что в координатах наши действия банальны: мы добиваемся, чтобы коэффициент при квадрате одной из переменной стал ненулевым, после чего выделяем полный квадрат и сводим задачу к задаче для меньшего числа неизвестных.

Докажем теперь инвариантность сигнатуры. Мы уже знаем, что r_0 не зависит от базиса. Пусть есть два базиса e_i и f_j, для которых (различные) сигнатуры суть (p, q, r_0) и (s, t, r_0). Докажем, что векторы $e_1, \dots, e_p, f_{s+1}, \dots, f_{s+t}, \dots, f_{s+t+r_0}$ линейно независимы. Действительно, если

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{t+r_0} \mu_j f_{s+j} = 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = -\sum_{j=1}^{t+r_0} \mu_j f_{s+j}.$$

Вычисляя квадратичную форму на левой и правой частях, получаем

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 = -\sum_{j=1}^{t} \mu_j^2,$$

поэтому $\lambda_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant p$, $\mu_j = 0$ при $s+1 \leqslant j \leqslant s+t$. Но тогда $\mu_j = 0$ и при $s+t+1 \leqslant j \leqslant s+t+r_0$, поскольку соответствующие векторы образуют базис ядра. Если сигнатуры в разных базисах разные, то без ограничения общности $p > s$, тогда $t > q$. Это значит, что $p + t + r_0 > p + q + r_0$, что противоречит тому, что мы нашли $p + t + r_0$ линейно независимых векторов.

В случае поля $\mathbb{C}$ классификация квадратичных форм ещё проще: плюсы и минусы не различаются. Но есть и полный аналог квадратичных форм.

Пример 3. Заменим квадрат длины на функцию «сумма квадратов модулей координат». Тогда аналогом скалярного произведения будет функция $\sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i$.

Определение 5. *Полуторалинейная форма* на пространстве V над $\mathbb{C}$ — это функция $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$, такая что

- $\forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}\ f(\lambda v, w) = \lambda f(v, w), f(v, \lambda w) = \overline{\lambda} f(v, w)$;
- $\forall v_1, v_2, w \in V\ f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$;
- $\forall v_1, v_2, w \in V\ f(w, v_1 + v_2) = f(w, v_1) + f(w, v_2)$.

Если при этом $f(v, w) = \overline{f(w, v)}$, то форма называется *эрмитовой.*

Если положить $v = w$, то получится некоторая функция на пространстве V. Нас интересует случай, когда форма f эрмитова. Функция в этом случае называется эрмитовой квадратичной формой.

Определение 6. *Комплексификация пространства V над полем действительных чисел* — пространство V_c над полем комплексных чисел, размерность которого равна размерности пространства V. Например, можно взять базис в пространстве V, и просто позволить координатам быть комплексными числами.

Замечание 6. Каждой билинейной форме B на пространстве над $\mathbb{R}$ соответствует полуторалинейная форма B_c на его комплексификации V_c. Если B симметрична, то B_c эрмитова. Это соображение мы ещё используем впоследствии.

Классификация эрмитовых форм такова:

Теорема 2. Для каждой эрмитовой полуторалинейной формы B над полем $\mathbb{C}$ существует базис $e_1, \ldots, e_{r_+}, e_{r_+ +1}, \ldots, e_{r_+ + r_-}, e_{r_+ + r_- + 1}, \ldots$ $\ldots, e_{r_+ + r_- + r_0}$ пространства V, такой что

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} +1, & j = i \leqslant r_+, \\ -1, & r_+ < j = i \leqslant r_+ + r_-, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Замечание 7. Соответствующая эрмитова квадратичная форма имеет в этом базисе вид

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_{r_+}|^2 - |z_{r_+ + 1}|^2 - \ldots - |z_{r_+ + r_-}|^2.$$

Доказательство теоремы совершенно аналогично доказательству теоремы для квадратичных форм.