0. Докажите, что если в группе квадрат любого элемента равен e, то она коммутативна.

1. Докажите, что таблица заполнена верно:

Порядок группы (число элементов)	2	3	4	5	6	7
Количество (неизоморфных) групп	1	1	2	1	2	1

(Для порядка 6 это сложная задача.)

2. Сколько существует (неизоморфных) групп порядка 8? (Это весьма сложная задача для тех, кто не знаком со структурной теорией групп.)

3. Докажите, что группа простого порядка единственна (с точностью до изоморфизма).

4. Чётностью перестановки σ называется чётность числа нарушений порядка: $\#\{(i,j) | i<j, \sigma(i)>\sigma(j)\} \bmod 2$. Докажите, что чётность композиции двух перестановок равна сумме чётностей (по модулю 2).

5. Докажите, что чётность перестановки, записанной в виде произведения циклов

$$(i_1^{(1)} i_2^{(1)} \dots i_{n_1}^{(1)})(i_1^{(2)} \dots i_{n_2}^{(2)}) \cdot \ldots \cdot (i_1^{(l)} \dots i_{n_l}^{(l)}),$$

равна чётности числа $(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_l-1)$.

6. *Тасовкой типа* (n,m) называется перестановка $n+m$ элементов, сохраняющая порядок следования первых n элементов и последних m элементов.

(**а**) Сколько существует тасовок типа (n,m)?

(**б**) Докажите, что тасовки типа (n,m) находятся во взаимно однозначном соответствии с левыми смежными классами S_{n+m} по $S_n \times S_m$

7. Определим операцию композиции на окружности $x^2+y^2=1$ следующим образом: сопоставим точке угол, отсчитываемый от горизонтального направления до этой точки против часовой стрелки; композиция двух точек есть точка, отвечающая сумме углов.

(**а**) Эта операция задаёт структуру абелевой группы (более точно, может быть дополнена: надо предъявить нейтральный элемент и определить обратный).

(**б**) Является ли подмножество точек окружности с рациональными координатами подгруппой?

(**в**) Является ли это множество бесконечным?

8. Докажите, что числа из интервала $(-c,c)$ с законом «умножения» $x \cdot y = \frac{x+y}{1+(xy)/c^2}$ образуют группу. («Сложение скоростей в теории относительности.»)