Контрольная работа

1. Пусть n делится на m. Может ли в группе порядка n не быть подгруппы порядка m?

2. Докажите, что в кольце с делителями нуля существуют нетривиальные идеалы. (Здесь надо предполагать, что в кольце есть единица; приведите пример кольца без единицы, где это неверно.)

3. Докажите, что многочлен $x^4 - x^2 + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

4. Вычислите размерность пространства многочленов $f(x)$ степени не выше 7, таких что $f(1) = f(2) = f(3) = 0$.

5. Вычислите матрицу осевой симметрии плоскости относительно горизонтальной прямой в базисах $\{(1,0),(0,1)\}$ и $\{(1,1),(1,0)\}$. Каковы собственные значения и собственные векторы этого линейного преобразования?

6. (**а**) Вычислите определитель матрицы $n \times n$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \lambda & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \lambda \end{vmatrix}.$$

(**б**) Найдите сигнатуру квадратичной формы $\sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} x_i x_j$.