Модули. Практика.

1. Докажите, что $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты.

2. Изоморфны ли группы (**а**) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$; (**б**) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$?

3. Рассмотрим группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Сколько в ней элементов порядка $2, 4$ и 6?

4. Пусть A — свободная абелева группа с базисом $e_1, \dots, e_n$, B — её подгруппа, порождённая элементами $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Докажите, что факторгруппа A/B конечна тогда и только тогда, когда определитель матрицы (a_{ij}) отличен от нуля, и в этом случае $\#(A/B) = |\det(a_{ij})|$.

5. Пусть A — свободная абелева группа с базисом e_1, e_2, e_3, B — её подгруппа, порождённая f_1, f_2, f_3. Разложите группу A/B в прямую сумму циклических, если

$$
\text{(а)}\ \begin{aligned} f_1 &= 4e_1 + 5e_2 + 3e_3, \\ f_2 &= 5e_1 + 6e_2 + 5e_3, \\ f_3 &= 8e_1 + 7e_2 + 9e_3; \end{aligned} \qquad \text{(б)}\ \begin{aligned} f_1 &= 4e_1 + 5e_2 + e_3, \\ f_2 &= 8e_1 + 9e_2 + e_3, \\ f_3 &= 4e_1 + 6e_2 + 2e_3; \end{aligned}
$$

6. Найдётся ли в группе $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ подгруппа, изоморфная (**а**) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; (**б**) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

7. Линейный оператор имеет матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Найдите жорданову нормальную форму и жорданов базис этого оператора.

8. Фиксируем комплексную 2×2-матрицу A. Рассмотрим линейный оператор на пространстве матриц 2×2, переводящий матрицу X в матрицу AX. Найдите жорданову нормальную форму этого оператора.

9. Линейный оператор A таков, что $A^2 = A$. Какой может быть жорданова нормальная форма этого оператора?

10. (**а**) Вычислите A^k, если $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. (**б**) (Продолжение) Получите отсюда явную формулу для чисел Фибоначчи. (**в**) Вычислите A^k, если $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

11. Вычислите $\exp A$, если $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. (Напомним, что $\exp A = \sum_{k \geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$.)

Модули. Теория.

Здесь намечено доказательство теоремы о модулях над кольцом главных идеалов. Напомним, что модуль M называется периодическим, если для некоторого $r \in R$ $rM = 0$. Множество всех периодов есть идеал $\operatorname{Ann} M$ кольца R (аннулятор модуля). Обратно, для идеала $I \subset A$ можно определить подмодуль M_I, состоящий из элементов, аннулируемых I. Модуль называется конечным, если он конечнопорождённый и периодический. Набор элементов $m_1, \dots, m_s$ называется слабо независимым, если из $r_1m_1 + \dots + r_sm_s = 0$ следует $r_1m_1 = \dots = r_sm_s = 0$.

1. (**а**) Пусть a — период M, т.е. $M = M_{(a)}$. Разложим a в произведение двух взаимно простых элементов: $a = bc$. Докажите, что $M = M_{(b)} \oplus M_{(c)}$. (Указание: $1 = bx + cy$.)

(**б**) Обозначим через $M(p) \subset M$ множество элементов, аннулируемых какой-либо степенью данного простого $p \in R$. Докажите, что для некоторого набора простых $M = M(p_1) \oplus \dots \oplus M(p_s)$.

В задачах 2,3 $M = M(p)$.

2. Будем говорить, что $m \in M$ имеет период p^k, если $p^k m = 0$, $p^{k-1}m \neq 0$. Пусть N — наибольшее число, для которого $p^{N-1}M \neq 0$. Рассмотрим $m \in M$ периода p^N и рассмотрим подмодуль (m), порождённый m. Пусть $\overline{M} = M/(m)$. Предположим, что $\overline{y_1}, \dots \overline{y_s} \in \overline{M}$ слабо независимы и имеют периоды $p^{n_1}, \dots, p^{n_s}$. Тогда найдутся представители $y_1, \dots, y_s \in M$, имеющие те же периоды, и такие, что $m, y_1, \dots, y_s$ слабо независимы.

3. (**а**) Проверьте, что $M_{(p)} \subset M$ есть конечномерное векторное пространство над полем $R/(p)$ (идеал (p) максимален, поэтому факторкольцо является полем).

(**б**) Докажите, что $\dim M_{(p)} > \dim \overline{M}_{(p)}$. (Размерность вычисляется над $R/(p)$.)

(**в**) Индукцией по $\dim M_{(p)}$ докажите, что M имеет систему слабо независимых образующих.

4. Докажите, что любой конечный модуль над кольцом главных идеалов есть прямая сумма циклических модулей.

5. Докажите, что в разложении $M = M(p) = \oplus_{j \geqslant 1}(R/(p^j))^{n_j}$ кратности n_j определены однозначно. (Указание. Проверьте, что $\dim M_{(p)} = \sum_{j \geqslant 1} n_j$, $\dim(M/M_{(p)})_{(p)} = \sum_{j \geqslant 2} n_j$ и т. д.)