1. (Критерий Эйзенштейна) Пусть многочлен с целыми коэффициентами $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ таков, что для некоторого простого числа p число a_n не делится на p, a_i делится на p при $i < n$, но a_0 не делится на p^2. Тогда многочлен $f(x)$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

2. (**а**) (Лемма Гаусса) Известно, что для многочленов $f(x), g(x)$ с целыми коэффициентами все коэффициенты многочлена $f(x)g(x)$ делятся на простое число p. Докажите, что один из многочленов $f(x), g(x)$ обладает тем же свойством.

(**б**) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[x]$ факториально. (Указание: Используйте доказанное утверждение и то, что кольцо $\mathbb{Q}[x]$ факториально.)

3. Докажите, что следующие многочлены неприводимы в $\mathbb{Z}[x]$:

(**а**) $x^{105} - 9$;

(**б**) $x^4 - x^2 + 1$;

(**в**) $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$, где p — простое число;

(**г**) $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n) - 1$ (a_i — различные целые числа);

(**д**) $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ (a_i — различные целые числа).

4. Докажите, что для каждого простого числа $p \equiv 1 \pmod 4$ найдется целое число a, такое что $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. (Указание. Докажите и используйте теорему Вильсона $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.)

5. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[i]$ целое рациональное простое число $p \equiv 3 \pmod 4$ остается простым, а остальные простые числа из $\mathbb{Z}$ перестают быть простыми и раскладываются в произведение двух простых сомножителей.