Линейные пространства

1. Докажите, что размерность пространства равна размерности двойственного к нему пространства.

2. Вычислите размерность пространства многочленов от одной переменной степени не выше n. Образуют ли линейное пространство многочлены степени ровно n?

3. Вычислите размерность пространства многочленов $f(x)$ степени не выше 6, таких что $f(1) = f(2) = 0$.

4. Чему равна размерность пространства многочленов от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ степени не выше k?

5. Найдите размерность линейной оболочки векторов $(1, 1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 4, 8, 16)$, $(1, 3, 9, 27, 81)$, $(1, 4, 16, 64, 256)$.

6. Докажите, что не существует поля из 6 элементов.

7. На отрезке $[0, 1]$ отмечено несколько точек, включая его концы, причем каждая отмеченная точка (кроме концов отрезка) является серединой отрезка, концы которого отмечены. Докажите, что координаты всех отмеченных точек рациональны.

8. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — многочлены от одной переменной t. Докажите, что существует такой ненулевой многочлен $G(x, y)$ от двух переменных x, y, что если в него подставить многочлены $f(t)$ и $g(t)$, то полученный многочлен $G(f(t), g(t))$ от переменной t будет тождественно равен нулю.