Замены базиса и линейные отображения

1. (**а**) Вычислите матрицу перехода от базиса $\{(1,0),(0,1)\}$ к базису $\{(0,1),(1,0)\}$ (в пространстве K^2). Выразите координаты вектора v во втором базисе через его координаты в первом, и наоборот.

(**б**) Те же вопросы для базисов $\{(1,0),(0,1)\}$ и $\{(-1,0),(0,1)\}$.

(**в**) Те же вопросы про базисы $\{(1,0),(0,1)\}$ и $\{(1,1),(0,1)\}$.

2. Вычислите матрицу поворота плоскости на угол α вокруг начала координат в базисе $\{(1,0),(0,1)\}$.

3. Вычислите матрицу осевой симметрии плоскости относительно вертикальной прямой в базисах $\{(1,0),(0,1)\}$ и $\{(1,1),(1,0)\}$.

4. (**а**) Докажите, что и мономы x^i, $i=0,\ldots,n$, и многочлены $(x+1)^i$, $i=0,\ldots,n$, образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n. (**б**) Вычислите матрицу перехода от первого из этих базисов ко второму, и наоборот.

В трёх следующих задачах нужно вычислить (бесконечные) матрицы в мономиальном базисе пространства многочленов.

(**в**) Вычислите матрицу линейного оператора, переводящего $f(x)$ в $f(x+1)$ (сдвиг переменной). (**г**) Вычислите матрицу линейного оператора, переводящего $f(x)$ в $f(-x)$ (отражение переменной).

(**д**) Вычислите матрицы оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ и оператора умножения на x. Как действует на пространстве многочленов *коммутатор* $[\frac{d}{dx},x]:=\frac{d}{dx}\circ x-x\circ\frac{d}{dx}$?

5. При каком условии на $a,b,c,d\in K$ векторы $\{(a,b),(c,d)\}$ образуют базис пространства K^2? Вычислите матрицу перехода от этого базиса к базису $\{(1,0),(0,1)\}$.

6. Докажите, что каждая из систем векторов $\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}\}$ и $\{1,\sqrt{2}+\sqrt{3},(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2,(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3\}$ образует базис над $\mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$. Вычислите матрицы перехода между этими базисами и матрицу оператора, переводящего x в $(\sqrt{3}-\sqrt{2})x$, в каждом из базисов.

7. Известно, что в системе линейно независимых векторов из $\mathbb{Q}^n$ все векторы имеют целые координаты. Докажите, что если рассматривать эти векторы как векторы из $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, то они линейно независимы в этом пространстве для всех простых чисел p, кроме, возможно, конечного числа.