Линейные операторы. Системы линейных уравнений.

1. Линейный оператор на четырёхмерном пространстве в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

2. Линейный оператор на трёхмерном пространстве в базисе $f_1 = 8e_1 - 6e_2 + 7e_3$, $f_2 = -16e_1 + 7e_2 - 13e_3$, $f_3 = 9e_1 - 3e_2 + 7e_3$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу этого оператора в базисе $f'_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $f'_2 = 3e_1 - e_2 + 2e_3$, $f'_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$.

3. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

(**а**) Решите систему уравнений $Ax = b$.

(**б**) При каких $a_{11}, \ldots, a_{22}$ матрица A обратима? Найдите обратную матрицу.

4. Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

(**а**) Решите систему уравнений $Ax = b$.

(**б**) При каких $a_1, \ldots, a_4$ матрица A обратима? Найдите обратную матрицу.

5. При каких условиях на $a_{11}, \ldots, a_{33}$ система

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}, \\ a_{31}x + a_{32}y = -a_{33} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 10, \\ 3x + 5y + 7z = 1, \\ 5x + 8y + 2z = 11, \\ 7x + 11y - 3z = 21. \end{cases}$$